



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA

**PLANIFICACION DE LA
EXPANSION DE UN SISTEMA DE
DISTRIBUCION VIA ALGORITMO
DE DESCOMPOSICION DE
BENDERS**

RAUL EDGARDO SANHUEZA HORMAZABAL

Tesis para optar al grado de
Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
HUGH RUDNICK VAN DE WYNGARD

Santiago de Chile, 1994



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA

**PLANIFICACION DE LA
EXPANSION DE UN SISTEMA DE
DISTRIBUCION VIA ALGORITMO
DE DESCOMPOSICION DE
BENDERS**

RAUL EDGARDO SANHUEZA HORMAZABAL

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

HUGH RUDNICK

LUIS CONTESSE

LUIS VARGAS

ALDO CIPRIANO

Para completar las exigencias del grado
de Magister en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, 1994

A mi esposa Silvia por su
comprensión.

A mis hijas Angela y Carla.

AGRADECIMIENTOS

En forma muy especial a mi profesor supervisor Dr. Hugh Rudnick por su confianza y valiosa ayuda en el desarrollo de este trabajo.

A la Universidad de Tarapacá por la oportunidad brindada en la continuación de mis estudios.

A la Pontificia Universidad Católica por el respaldo otorgado a esta investigación.

A Daniel Cámac por su sincera amistad y críticas oportunas.

INDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA.....	ii
AGRADECIMIENTOS.....	iii
INDICE DE TABLAS.....	vi
INDICE DE FIGURAS.....	vii
RESUMEN.....	ix
ABSTRACT.....	x
I INTRODUCCION.....	11
1.1 Planteamiento del Problema.....	11
1.2 Revisión Bibliográfica.....	12
1.3 Objetivos.....	16
1.4 Estructura de la Tesis.....	16
II MODELO PARA LA EXPANSION DE UN SISTEMA DE DISTRIBUCION DE ENERGIA ELECTRICA.....	18
2.1 Introducción.....	18
2.2 Componentes del Sistema de Distribución y su Modelación.....	19
2.2.1 Demanda.....	19
2.2.2 Red de Alimentadores.....	20
2.2.3 Subestaciones.....	22
2.3 Representación de los Componentes del Modelo.....	24
2.4 Modelo de Planificación.....	25
2.4.1 Función de Costo.....	25
2.4.2 Función Objetivo.....	26
2.4.3 Restricciones Matemáticas.....	27
2.5 Modelo Propuesto para la Planificación.....	29

III	METODOLOGIA DE SOLUCION	31
3.1	Introducción.....	31
3.2	Descomposición de Benders	31
3.3	Algoritmo de Descomposición de Benders.....	36
IV	DESARROLLO COMPUTACIONAL.....	40
4.1	Introducción.....	40
4.2	Creación de la Base de Datos.....	40
4.3	Diagrama en Bloques del Algoritmo.....	43
V	APLICACIONES	46
5.1	Primer Sistema de Prueba	46
5.2	Segundo Sistema de Prueba	51
5.3	Tercer Sistema de Prueba	55
5.4	Cuarto Sistema de Prueba.....	62
VI	CONCLUSIONES Y FUTUROS DESARROLLOS	69
6.1	Conclusiones	69
6.2	Futuros Desarrollos	71
	BIBLIOGRAFIA	73
	Anexo A: MODELOS PARA LA PREDICCIÓN DE DEMANDA.....	80
	Anexo B: OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CORTE DE BENDERS.....	82
	Anexo C: HERRAMIENTAS DE OPTIMIZACIÓN	84
	C.1 Algoritmo Simplex.....	84
	C.2 Algoritmo de Programación Entera.....	88
	C.3 Algoritmo de Flujo en Redes.....	90
	Anexo D: CÁLCULO DE CAÍDA DE TENSION	93
	Anexo E: RESULTADOS DEL PRIMER SISTEMA DE PRUEBA.....	95

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla 5.1: Proceso convergencia, primer sistema de prueba.....	48
Tabla 5.2: Datos generales, segundo sistema de prueba	52
Tabla 5.3: Componentes de costos, segundo sistema de prueba	53
Tabla 5.4: Datos generales para el análisis, tercer sistema de prueba.....	56
Tabla 5.5: Demandas máximas anuales en MVA, tercer sistema de prueba.....	57
Tabla 5.6: Proceso de convergencia, tercer sistema de prueba	57
Tabla 5.7: Tensión en nodos, tercer sistema de prueba	62
Tabla 5.8: Demandas máximas anuales en MVA, cuarto sistema de prueba.....	63
Tabla 5.9: Proceso de convergencia, cuarto sistema de prueba	64
Tabla 5.10: Caídas máximas de voltajes en porcentaje	68
Tabla E.1: Definición de variables para el primer sistema de prueba.....	95

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 2.1: Envolvente de costos mínimos para conductores de distinta sección	20
Figura 2.2: Componentes característicos de costos en una subestación	23
Figura 2.3: Representación de los componentes del modelo.....	24
Figura 3.1: Construcción de la función $\alpha(\mathbf{x})$	34
Figura 4.1: Representación de una subestación.....	40
Figura 4.2: Red general de análisis	41
Figura 4.3: Estructura del archivo de datos	42
Figura 4.4: Diagrama en bloque del algoritmo	43
Figura 5.1: Primer sistema de prueba.....	46
Figura 5.2: Proceso convergencia, primer sistema de prueba	49
Figura 5.3: Interpretación de las ecuaciones de cortes	49
Figura 5.4: Solución óptima, primer sistema de prueba.....	50
Figura 5.5: Solución óptima lineal, primer sistema de prueba	51
Figura 5.6: Segundo sistema de prueba	52
Figura 5.7: Costos para el conductor ACSR de sección Raven	53
Figura 5.8: Solución óptima, primer sistema de prueba.....	54
Figura 5.9: Proceso de convergencia, segundo sistema de prueba	55

Figura 5.10: Tercera red de prueba, sistema de distribución en 25 kV.....	56
Figura 5.11: Proceso de convergencia, tercer sistema de prueba.....	58
Figura 5.12: Red para el año 1, tercer sistema de prueba.....	58
Figura 5.13: Red para el año 2, tercer sistema de prueba.....	59
Figura 5.14: Red para el año 3, tercer sistema de prueba.....	59
Figura 5.15: Red para el año 4, tercer sistema de prueba.....	60
Figura 5.16: Red para el año 5, tercer sistema de prueba.....	60
Figura 5.17: Costos de los alimentadores, tercer sistema de prueba.....	61
Figura 5.18: Cuarto sistema de prueba.....	64
Figura 5.19: Proceso de convergencia, cuarto sistema de prueba.....	65
Figura 5.20: Red para el año 1, cuarto sistema de prueba.....	65
Figura 5.21: Red para el año 2, cuarto sistema de prueba.....	66
Figura 5.22: Red para el año 3, cuarto sistema de prueba.....	66
Figura 5.23: Red para el año 4, cuarto sistema de prueba.....	67
Figura 5.24: Red para el año 5, cuarto sistema de prueba.....	67
Figura D.1: Modelo circuital equivalente de un alimentador.....	93
Figura D.2: Diagrama fasorial del circuito equivalente.....	93

RESUMEN

En este trabajo se propone una nueva metodología para planificar la expansión de sistemas de distribución eléctricos. Se presenta el modelo de planificación desarrollado, así como de una herramienta matemática para su resolución.

El modelo de programación propuesto es de tipo entero-mixto, cuya función objetivo corresponde al valor presente de los costos de inversión y pérdidas de demanda y energía que tienen lugar a lo largo del periodo de estudio. Esta función objetivo se minimiza sujeta a restricciones de radialidad, capacidad y lógicas.

El problema de planificación se resuelve mediante el algoritmo de descomposición de Benders, que demuestra ser apropiado en la resolución de este tipo de problemas y así mismo, presenta ventajas frente a otras técnicas de solución.

Finalmente, la efectividad del algoritmo propuesto se evalúa y demuestra a través de su aplicación en varios ejemplos numéricos.

ABSTRACT

A new methodology for electric power distribution system planning is proposed. The developed planning model is introduced, as well as the mathematical tool for its resolution.

The model is based on mixed-integer programming and its objective function represents the present value of investment, energy and power losses which take place throughout the duration of the plan. This objective function is minimized subject to radiality, power capacity, and logical constraints.

The planning problem is solved with the Benders' decomposition algorithm. It proves adequate for the solution of this kind of problems and it shows advantages over other methods.

Finally, the effectiveness of the proposed algorithm is validated and demonstrated with several numerical examples.

I INTRODUCCION

1.1 Planteamiento del Problema

El sistema de distribución es el sistema eléctrico más cercano al consumidor y su función es la de prestar servicio con la mayor calidad y eficiencia.

Un sistema de distribución lo constituye normalmente un grupo de subestaciones en conjunto con una cierta cantidad de alimentadores encargados de distribuir la energía a los consumos. La zona cubierta por el grupo de alimentadores que distribuyen la energía desde una misma subestación se denomina área de servicio de la subestación. En el transcurso de los años, debido al cambio y normal crecimiento del consumo eléctrico, el consumo en una determinada área puede exceder la capacidad de la subestación. En estas condiciones sería necesario tomar decisiones como:

- a) Ampliar la capacidad de la subestación o
- b) Transferir el exceso de carga a una subestación vecina con exceso de capacidad o
- c) Definir la ubicación de una nueva subestación

Cada decisión está sujeta a factores como: densidad de carga, limitaciones geográficas, consideraciones ambientales, derecho a servidumbre, acceso al sistema de transmisión, consideraciones de tipo económico, etc.

Encontrar la mejor alternativa no es algo sencillo. Por ejemplo, si en un sistema se considera como única decisión la ampliación de la capacidad de n subestaciones, con m posibilidades de expansión para cada una de ellas (incluida la alternativa de no hacer nada), el número total de combinaciones o alternativas de decisión es m^n . Es precisamente por este crecimiento exponencial de combinaciones, que en un sistema de gran número de subestaciones, no sea fácil la tarea de determinar la alternativa de menor costo.

De forma similar al problema de capacidad de las subestaciones, la aleatoriedad en el crecimiento geográfico del consumo conlleva a continuos cambios en la configuración de la red, cambios que deben permitir mantener el voltaje en los

alimentadores en límites aceptables. Para lograr esto se puede considerar alternativas como: distintas secciones para los alimentadores, corrección del factor de potencia, etc.

Planificar la expansión a largo plazo de un sistema de distribución es una tarea ardua y compleja, en la cual se decide la realización de elevadas inversiones, así como también, la implantación de políticas tendientes a optimizar el uso de recursos. En este trabajo se trata esta problemática, que tiene como objetivo el determinar la mejor estrategia de expansión del sistema de distribución, de manera de mantenerlo permanentemente adaptado evitando, por otra parte, el desarrollo de capacidades ociosas.

1.2 Revisión Bibliográfica

La planificación de sistemas de distribución ha sido abordada en variadas formas por distintos autores. A continuación se hace una breve revisión de algunos de los trabajos incluidos en la bibliografía.

[Masu74] presenta un modelo en el cual se simula el crecimiento de la carga y el área de servicio de las subestaciones, para establecer el plan de expansión de menor costo, tanto para el dimensionamiento como para la determinación del instante óptimo de ampliación de la capacidad de las subestaciones. En la metodología empleada se divide el problema en dos subproblemas, en el primero se determina la capacidad óptima de las subestaciones y en el segundo la transferencia óptima de carga, considerando los datos de capacidad definidos en el primer subproblema. Finalmente, en un análisis post optimal, se grafica la suma de ambos costos como función de la capacidad total instalada. El mejor plan de expansión se obtiene de aquel que minimiza esta función, conclusión que se obtiene después de sucesivas modificaciones de las restricciones. Como metodología de solución se emplean técnicas de programación lineal y entera.

[Craw75] presentan una metodología de programación lineal basada en los algoritmos de camino más corto de Dijkstra y el de transporte de Ford y Fulkerson, para determinar el área de servicio de las subestaciones de distribución que minimiza el producto demanda distancia desde las subestaciones. La metodología presentada, simplifica el problema al determinar únicamente la capacidad y área de servicio de un

conjunto de subestaciones cuya ubicación es conocida, quedando de parte del planificador, después de repetidas resoluciones del modelo, la comparación de otras alternativas de ubicación mediante el valor de la función objetivo. No se incluyen restricciones de capacidad de subestaciones y alimentadores.

[Hind77] proponen un modelo de transbordo con restricción de capacidad, en el cual se incluye la representación de los costos fijos tanto de subestaciones como de los alimentadores. La búsqueda del óptimo se realiza acotando sistemáticamente las variables enteras mediante un proceso de enumeración estructurada, semejante al de un algoritmo de branch and bound. El método presentado es esencialmente de búsqueda, donde las dificultades computacionales se vencen utilizando criterios heurísticos.

[Göne81] presentan un desarrollado modelo para la planificación estática de sistemas de distribución el cual incluye los costos fijos y variables de todos los elementos. La concavidad de la función de costo es manejada mediante su linealización por tramos. La solución del modelo se encuentra utilizando el programa computacional estandar MPSX, que permite resolver problemas de programación entera mixta, basándose en el método simplex y usando un procedimiento de bifurcación y acotación, si la solución inicial no alcanza los requerimientos de variables enteras. Debido a la gran cantidad de variables enteras involucradas en la modelación, sólo se considera la solución de pequeñas redes.

[Thom80] proponen un modelo de transbordo con cargos fijos para la planificación de redes de distribución. En su solución se utiliza un algoritmo branch and bound que se basa en una tabla de camino más corto para resolver, en forma aproximada pero muy rápida, los sucesivos problemas de transbordo. La tabla de camino más corto se obtiene como resultado de la observación del significado de los multiplicadores simplex, en el sentido de la reducción marginal del costo de operación al introducir una nueva subestación al sistema.

[Sun82] desarrollan una metodología que descompone la tarea completa de planificación en dos fases utilizando el concepto de año horizonte (año de blanco). En la fase uno el sistema de distribución es considerado de naturaleza estática, es decir, cargas constantes e iguales al nivel proyectado para el año horizonte. En la fase dos el efecto del crecimiento de carga es examinado en forma explícita. Para cada año entre el año base y

el de horizonte se determina el sistema intermedio óptimo, empleando exclusivamente el conjunto de equipos que ha sido especificado por el sistema óptimo estático para el año de horizonte. Ambas fases, uno y dos, se formulan como un problema de transbordo con cargos fijos donde se emplea un algoritmo branch and bound que incluye una modelación de componentes con cargos fijos y costos variables.

[Fawz83] desarrollan un modelo para la planificación de sistemas de distribución radial que considera la no linealidad de la función objetivo. Para ello se utiliza un algoritmo de flujo en redes con concavidad en la función objetivo. El efecto de los costos fijos para las subestaciones es analizado a través de un algoritmo branch and bound, y los costos fijos en los alimentadores son secuencialmente considerados a través de un procedimiento iterativo aproximado. La restricción de caída de voltaje se verifica una vez que se ha encontrado la solución del problema.

[El-Ka84] presenta una técnica para el planeamiento óptimo de subestaciones y alimentadores primarios de un sistema de distribución, el que incluye una modelación en el tiempo de los costos fijos y cargas variables, así como, restricciones de caída de voltaje y de radialidad. El modelo se resuelve utilizando un algoritmo de programación entera mixta en el que se emplean técnicas de esparcidad.

[Will85] presenta como alternativa a la expansión de la capacidad del sistema de subestaciones, la transferencia de carga entre subestaciones vecinas. El algoritmo se basa en el trabajo desarrollado por [Masu74] al cual se le incluye métodos como el de minimizar el peak de diversidad de carga entre subestaciones. Para ello se utiliza una completa información de la curva de demanda diaria de cada alimentador así como del flujo de potencia en los mismos.

[Göne86] presentan un elaborado modelo. En el se plantean en forma simultánea los problemas de subestaciones y alimentadores. La base del modelo está desarrollado por [Göne83] en el cual se ha incluido una programación multietapa junto con las restricciones de radialidad y caída de voltaje. El modelo final resulta bastante completo, sin embargo, presenta el inconveniente que cada una de estas consideraciones introduce al modelo nuevas variables de tipo entero, reduciendo su aplicación a pequeñas redes. La solución del modelo se obtiene con el programa comercial MPSX/370 R1.6.

[Garr77] proponen un método para la planificación de la expansión del sistema de subtransmisión radial, teniendo como parte integrante los sistemas eléctricos rurales; el método en sí cae en el ámbito de la simulación ya que en él se propone la determinación y posterior análisis de cada una de las posibles configuraciones radiales. La viabilidad de cada una de éstas en cuanto a límites de capacidad y caída de voltaje se examina vía un programa flujo de carga. El algoritmo determina los lugares con déficit de capacidad y excesiva caída de voltaje, así como un conjunto de posibles configuraciones del sistema. El inconveniente de la metodología es que cada etapa de planificación es resuelta en forma aislada desligándose de la interrelación de las decisiones.

[Miki86] propone un modelo que entrega los valores óptimos de todos los parámetros requeridos en el diseño de un sistema de distribución, que se encuentra en un área de consumo sin una red existente y en la cual la densidad de carga uniforme aumenta con el tiempo. El problema se presenta como uno de programación dinámica, pero se resuelve en forma estática mediante una adecuada y definida estrategia de planificación.

[Mars91] utilizan el sistema interactivo NETOPT para diseñar redes de subtransmisión. Todas las redes propuestas se almacenan para que en cualquier instante puedan desplegarse gráficamente y ser analizadas por un programa de flujo de carga. El algoritmo se basa en el empleo de un Lagrangeano relajado, donde las especificaciones de seguridad se confirman por el uso de una funcional derivada estadísticamente y un esquema generador de restricciones que las agrega cuando la formulación del problema lo requiere.

Cuando la problemática de la expansión debe considerar fallas, como es el caso de los sistemas enmallados, el problema se vuelve de naturaleza combinatorial y extremadamente complejo, por lo que en estos casos resulta poco práctico establecer un óptimo global. [Nara92] proponen una metodología heurística que permite considerar este caso.

Se manifiesta claramente en esta revisión bibliográfica el hecho de que una adecuada modelación de los componentes del sistema necesita forzosamente la inclusión de variables de tipo enteras, esto sin considerar la concavidad de la función objetivo.

A pesar de que existen adecuadas herramientas matemáticas para manejar estas variables, en la práctica estas se ven limitadas a medida que dichas variables aumentan en número. Es por esto que en algunos trabajos simplemente se acepta linealidad en la modelación de algunos componentes, se prescinda de algunas consideraciones de planificación, no se estime la naturaleza dinámica del problema, o lo más frecuente, se trate en forma separada los subproblemas de subestaciones y alimentadores.

Respecto a las metodologías de solución, se emplea mayoritariamente técnicas de programación entera mixta, ya que la utilización de variables enteras, restringida a valores 0 y 1, se presta para representar la decisión de construir o no construir. También se emplean otras técnicas como algoritmos de transbordo [Craw75] programación dinámica [Adam74] algoritmo de flujo en redes con función de costo convexa [Fawz83]. La mayor parte de los investigadores utilizan técnicas especializadas que combinan algoritmos de branch and bound y de transporte.

1.3 Objetivos

El objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo para planificar la expansión de un sistema eléctrico de distribución, en el que se considere la naturaleza dinámica del problema y se utilicen técnicas matemáticas de descomposición en su solución.

1.4 Estructura de la Tesis

Esta tesis contiene una descripción detallada de un modelo matemático propuesto para la planificación de la expansión de un sistema de distribución. Cada componente del modelo es deducido y su función en el modelo es explicada en detalle. La validez del modelo es evaluada con la aplicación de ejemplos estándar, para lo cual se han desarrollado variados algoritmos de programación matemática., de los cuales se hacen también algunos comentarios.

En el Capítulo 2 se presenta el modelo matemático propuesto para la expansión del sistema de distribución. Los principios básicos para la planificación de la red como: la descripción de los componentes del modelo, deducción de los componentes de costos y consideraciones topológicas para la representación de los componentes del sistema eléctrico, también son analizados.

El Capítulo 3 contiene la teoría matemática, principio de descomposición de Benders, con la cual se resuelve el modelo. Se incluye al final del capítulo una descripción esquemática mediante un diagrama de flujo de la interacción entre los diferentes algoritmos matemáticos implementados.

El comportamiento y la validez de la metodología son discutidas en el Capítulo 4. En este capítulo se concentra toda la experiencia ganada en el desarrollo y uso de algoritmos así como de los programas computacionales implementados.

El Capítulo 5 contiene las conclusiones finales del trabajo y se hacen algunos comentarios para futuros desarrollos en el método propuesto de planificación.

II MODELO PARA LA EXPANSION DE UN SISTEMA DE DISTRIBUCION DE ENERGIA ELECTRICA

2.1 Introducción

Un sistema eléctrico de distribución consiste en un gran número de unidades interconectadas, que operan en conjunto para entregar energía a los consumidores. Lo más frecuente es que en las áreas urbanas el sistema de alimentadores sea esencialmente una red de conductores operados de manera radial [Ham90], mediante la abertura y cierre de adecuados interruptores. La razón de esto se debe a que esta configuración simplifica los esquemas de protección, lo que se suma además a la baja tasa de falla que presentan los dispositivos de protección en baja tensión.

Al planificar la expansión de estos sistemas se presenta un sinnúmero de alternativas, las que comúnmente se encuentran interrelacionadas. Por ejemplo, la determinación de la mejor ubicación o ampliación de la capacidad de una subestación puede requerir el análisis y planteamiento de localizaciones y capacidades de no sólo una, sino, de un gran conjunto de subestaciones de distribución. Esto se debe a que en las subestaciones la decisión de diseño no es independiente del resto del sistema, la disponibilidad de capacidad en una subestación depende de la capacidad que necesita ser agregada o transferida a la subestación vecina. Además, existe un número de otras restricciones adicionales y/o factores que podrían dificultar o simplificar el problema. Por ejemplo, no todas las ubicaciones están disponibles para los niveles de capacidades, ya sea por limitaciones de capacidad, estética, contaminación u otros factores involucrados

Esta interdependencia entre las decisiones puede complicar el problema o tornarlo casi imposible de solucionar. Es por esto que al planificar la expansión de estos sistemas se requiera el apoyo de modelos como una ayuda en la toma de decisiones.

En este capítulo se presenta en detalle la formulación de un modelo para la planificación de la expansión de un sistema de distribución de energía eléctrica.

2.2 Componentes del Sistema de Distribución y su Modelación

Para la modelación de un sistema de distribución se requiere en general tres tipos de información básica como datos de entrada:

- a) localización y cuantificación de la demanda
- b) descripción y capacidad de los segmentos de alimentadores que conforman la red.
- c) localización y capacidad de las subestaciones

2.2.1 Demanda

El constante aumento de la demanda es una de las razones por las cuales los sistemas eléctricos deben sufrir frecuentes modificaciones y alteraciones en el transcurso del tiempo, esto como una manera de mantenerlo permanentemente adaptado.

La demanda es un parámetro con características aleatorias y para su estimación hacia años futuros es frecuente el uso de modelos matemáticos. En el apéndice A, se muestra algunos modelos utilizados para la predicción, considerando un horizonte típico de 10 a 20 años.

El modelo a desarrollar en este trabajo es de naturaleza determinística, por lo que la aleatoriedad de la demanda no será considerada. Así mismo, se asume un factor de potencia constante para toda la red y que no hay diversidad entre las diferentes cargas, por lo que los datos de demanda se consideran estáticos e iguales al mayor valor obtenido para el periodo. Esta última restricción puede ser relajada, pero el resultado es un engrandecimiento considerable del modelo.

La demanda del sistema se representa por consiguiente en forma concentrada y representativa de una determinada área geográfica. La ventaja de esto es la posibilidad de una especificación en mejor detalle de cargas no uniformes, [Will92], y permite, por otra parte, la especificación de los segmentos de alimentadores ya que pueden denotarse por la localización de un par de nodos de demanda.

En publicaciones en las cuales la metodología empleada no considera la red de alimentadores, [Craw75] y [Will85], la información de la demanda del sistema se obtiene por la confección de un reticulado de toda el área de planificación, donde a cada sector se le asigna su carga estimada.

2.2.2 Red de Alimentadores

La topología de la red está totalmente especificada mediante la información de conexión nodo-arco. Cada arco se identifica por sus dos nodos terminales. Estos nodos corresponden a los puntos de unión del circuito de alimentadores trifásicos. En forma general el flujo de potencia por un arco puede ir en cualquiera de las dos direcciones, por lo que éstos se consideran bidireccionales.

Cada segmento de alimentador necesita tres parámetros para su especificación. Ellos son capacidad máxima para el flujo de potencia que puede transmitir, el costo fijo y el costo variable. En la figura 2.1 se muestran características típicas de conductores de secciones diferentes.

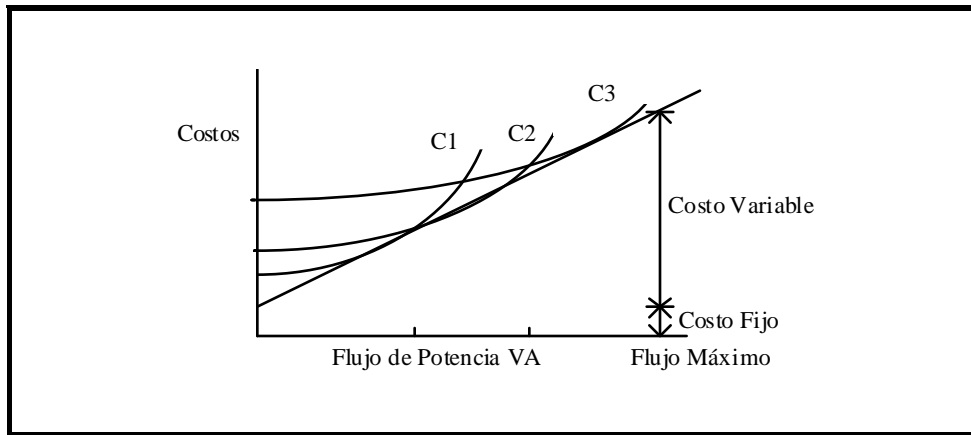


Figura 2.1: Envoltorio de costos mínimos para conductores de distinta sección

En un alimentador nuevo el costo fijo incluye los costos de: conductor, postes, accesorios y faena para instalación de la línea. La componente variable de costo, considerada tanto para los alimentadores existentes y nuevos, refleja las pérdidas por efecto Joule.

En la figura 2.1 cada una de las tres curvas representa la suma de los costos de inversión en la instalación de un alimentador. El costo mínimo para transportar una determinada potencia corresponde a la curva envolvente, la cual puede ser aproximada a una recta de pendiente constante para el modelo a plantear.

Esta recta, corresponde a la componente variable del costo, costo de pérdidas, la cual se expresa en función del flujo de potencia (en kVA) del alimentador mediante [Ponn87]:

$$P_{Lij} = d_{ij}^{\$} P_{ij}^2 \quad (2.1)$$

donde

$$d_{ij}^{\$} = \frac{0.001 \times r}{(kV)^2} l_{ij} \quad (2.2)$$

Utilizando la ecuación (2.1), el costo presente de las pérdidas anuales de energía durante toda la vida útil del alimentador, se obtiene como:

$$E_p = d_{ij} P_{ij}^2 \quad (2.3)$$

donde

$$d_{ij} = \frac{8.76 \times r}{(V)^2} l_{ij} \sum_{k=1}^{NA} \frac{C_{ek} \times LLF_k}{(1+u)^k} \quad (2.4)$$

donde r es la resistencia por fase en ohms por kilómetro, l_{ij} es la longitud del conductor en kilómetros, V es el voltaje del circuito en kilovolt, NA vida útil del alimentador en años, C_{ek} es el costo de energía en el k-esimo año en pesos por kilowatt-hora, LLF_k es el factor de pérdida de carga durante el k-esimo año y u es la tasa de descuento anual.

El modelo matemático empleado para los alimentadores es:

$$C_a = fx + dy$$

con

$$0 \leq Ux - y \quad (2.5)$$

con C_a como el costo total, inversión y operación, en el alimentador, f el costo fijo de inversión por unidad de longitud en pesos por kilómetro, d el costo variable por transmisión de potencia en pesos por kilovolt-amper-kilómetro, x variable de decisión, restringida a valores 0 o 1, y el flujo de potencia transmitido por la subestación en kilovolt-amper y U la capacidad máxima del conductor en kilovolt-amper.

La utilización de un modelo compacto para representar todas las alternativas propuestas de conductores y subestaciones presenta enormes simplificaciones en la solución del problema. En [Fawz83], por ejemplo, se utiliza una representación más real de los costos utilizando directamente su envolvente, acción que naturalmente lleva a un manejo no lineal del problema. De mismo modo, en [Adam74] y [Göne81] se emplea una representación lineal por tramo. En ambos casos esta mayor precisión en la representación de los componentes del sistema conlleva a un mayor número de variables del problema.

2.2.3 Subestaciones

La información necesaria para representar una subestación, existente o nueva, es su capacidad disponible, características de costos y conexión a posibles alimentadores. Las subestaciones se representan en el modelo como un arco que conecta el nodo de referencia con el nodo fuente que la identifica.

La decisión de ubicar la subestación, la capacidad y el área de servicio se determina en base a su costo total. En la figura 2.2 se muestra los costos típicos asociados a una subestación, deducida por un procedimiento idéntico al de los alimentadores. El costo fijo incluye los costos de construcción y el costo capitalizado de las pérdidas sin carga. En el caso de una subestación existente este costo es cero. El costo

variable para todas las subestaciones consiste esencialmente en aquellos por pérdidas en el cobre.

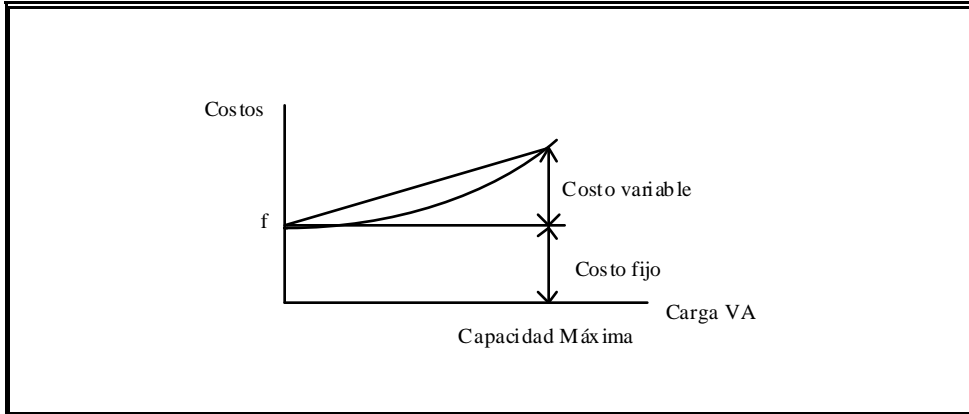


Figura 2.2: Componentes característicos de costos en una subestación

El modelo matemático empleado para las subestaciones es:

$$C_s = fx + dy$$

con

$$0 \leq Ux - y \quad (2.6)$$

donde C_s es el costo total, inversión y operación en pesos, f el costo fijo de inversión en pesos, d el costo variable de operación en pesos por kilo volt-amper, x es una variable de decisión, restringida a valores 0 o 1, y es el flujo de potencia entregada por la subestación en kilovolt-amper y U la capacidad máxima de la subestación en kilovolt-amper.

2.3 Representación de los Componentes del Modelo

Los consumos, y por ende las cargas, se consideran distribuidas a lo largo de las rutas de los alimentadores por los cuales son abastecidos. Así, para cada nodo j , habrá

una carga L_j asociada, si el nodo es de transbordo L_j será cero. Puesto que el flujo en cualquiera de los tramos del alimentador puede dirigirse en cualquiera de los sentidos, cada tramo estará representado por dos arcos dirigidos y en sentido opuesto el uno del otro, con un flujo asociado F y F' respectivamente. Similarmente cada subestación estará representada por un arco dirigido desde un nodo ficticio hasta el nodo que la representa.

En la figura 2.3 se presenta a manera de ejemplo esta representación de los componentes.

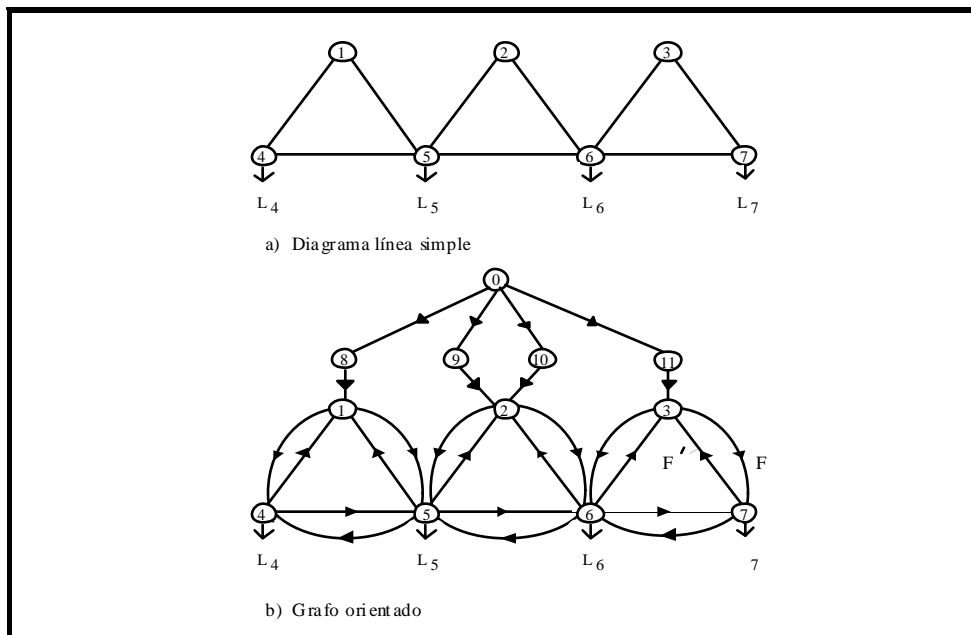


Figura 2.3: Representación de los componentes del modelo

Los nodos 1, 2 y 3 representan subestaciones con un transformador en los nodos 1 y 3 y dos transformadores en el nodo 2. Los nodos 4, 5, 6 y 7 son nodos de carga. Los restantes nodos son ficticios de los cuales el nodo 0 es de referencia y considerado único nodo fuente.

2.4 Modelo de Planificación

Conocidos los componentes del modelo y su representación en la red se describe a continuación el desarrollo de un modelo para resolver en forma óptima el problema de dimensionamiento, localización y ampliación de subestaciones de distribución, así como el de expansión de la red de alimentadores.

2.4.1 Función de Costo

El funcional de costo en el problema de planificación representa el valor presente de las decisiones de construir o ampliar subestaciones y alimentadores durante el periodo de estudio. Este incluye los costos de inversión, gastos de operación y de mantenimiento, depreciación, impuestos, costos por pérdidas de demanda y energía tanto en el sistema de distribución como en el de subtransmisión o transmisión a los cuales se conecta.

El valor presente de los costos de construir una subestación en el tiempo t es la suma del valor presente de los costos fijos y variables. El costo fijo incluye costo de inversión y costos por pérdidas de energía y demanda en el fierro del transformador, mientras que el costo variable incluye los costos por pérdidas de energía y demanda en el cobre del transformador. De esta manera el valor presente de la decisión de construir una subestación conectada en el nodo k y representada por el arco $(h, k) \in NSI$, en el año t puede expresarse por:

$$C_{hkt} = \sum_{(h,k) \in NSI} f_{hkt} x_{hkt} + \sum_{(h,k) \in NSI} d_{hkt} y_{hkt} \quad (2.7)$$

Similarmente el valor presente asociado con la construcción de un alimentador en el tiempo t es la suma del valor presente del costo fijo, el cual fundamentalmente lo compone el costo de inversión, y costo variable que representa el costo por pérdidas de energía y demanda. De esta manera el valor presente de la decisión

de construir un alimentador conectado en el nodo s y representado por el arco $(r,s) \in NAI$, en el año t puede expresarse por:

$$C_{rst} = \sum_{(r,s) \in NAI} f_{rst} x_{rst} + \sum_{(r,s) \in NAI} d_{rst} y_{rst} \quad (2.8)$$

2.4.2 Función Objetivo

La función objetivo correspondiente al modelo de planificación es el resultado de los componentes de la función de costos ya mencionadas. En ella se incluyen variables continuas y enteras 0-1, las que representan la decisión de construir una subestación o alimentador. La función objetivo del modelo es:

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{Tp-1} \sum_{(h,k) \in NSI} f_{hkt} x_{hkt} + \sum_{t=0}^{Tp-1} \sum_{(h,k) \in NSI} d_{hkt} y_{hkt} + \\ & \sum_{t=0}^{Tp-1} \sum_{(h,k) \in NSE} d_{hkt} y_{hkt} + \sum_{t=0}^{Tp-1} \sum_{(r,s) \in NAI} f_{rst} [x_{rst} + x_{srt}] + \quad (2.9) \\ & \sum_{t=0}^{Tp-1} \sum_{(r,s) \in NAI} d_{rst} [y_{rst} + y_{srt}] + \sum_{t=0}^{Tp-1} \sum_{(r,s) \in NAE} d_{rst} [y_{rst} + y_{srt}] \end{aligned}$$

donde los términos asociados a las variables x corresponden a la componente de la función de costo asociados a la construcción de una subestación y alimentador respectivamente y los términos asociados a las variables y corresponden a la componente de costo variable de la función objetivo.

2.4.3 Restricciones Matemáticas

La función objetivo del modelo está sujeta a restricciones matemáticas relacionadas con los requerimientos de la planificación multietapa del sistema de distribución. Las restricciones se detallan a continuación:

Balance de Potencia

El balance de potencia en cada nodo de la red debe asegurarse para cada año del periodo de planificación. Por tanto en el nodo j , con una demanda o suministro para el año t de b_{jt} , se debe cumplir:

$$\sum_{i \in ND_j} [y_{ijt} - y_{jit}] = b_{jt} \quad (2.10)$$

Restricción de capacidad

Para cualquier arco, represente éste una subestación o un alimentador, se debe cumplir:

a) para una subestación propuesta

$$0 \leq y_{hkl} \leq U_{hk} \left[\sum_{t=0}^l x_{hkt} \right] \quad \forall (h, k) \in NSI \quad y \quad l = 0, \dots, T_p - 1 \quad (2.11)$$

b) para una subestación existente

$$0 \leq y_{hk} \leq U_{hk} \quad \forall (h, k) \in NSE \quad (2.12)$$

c) para un alimentador propuesto

$$0 \leq y_{rsl} \leq U_{rs} \left[\sum_{t=0}^l x_{rst} \right] \quad \forall (r, s) \in NAI \quad y \quad l = 0, \dots, T_p - 1 \quad (2.13)$$

d) para un alimentador existente

$$0 \leq y_{rs} \leq U_{rs} \quad \forall (r, s) \in NAE \quad (2.14)$$

Restricciones Lógicas

Hay un grupo de restricciones que relacionan las decisiones de construcción. Para garantizar que una subestación o alimentador sólo se construya una vez durante el periodo de planificación, las variables de decisión deben satisfacer:

a) para las subestaciones

$$\sum_{t=0}^{Tp-1} x_{hkt} \leq 1 \quad \forall (h, k) \in NSI \quad (2.15)$$

b) para los alimentadores

$$\sum_{t=0}^{Tp-1} x_{rst} \leq 1 \quad \forall (r, s) \in NAI \quad (2.16)$$

Restricción de Radialidad

Cuando la radialidad es un requisito, ésta debe incluirse explícitamente. Para cada nodo j debe cumplirse:

$$\sum_{i \in ND_j} x_{ijt} \leq 1 \quad (2.17)$$

Restricción de Caída de Voltaje

Las restricciones de voltaje no son consideradas explícitamente en el modelo, sino que se verifican una vez que se ha obtenido el resultado final de la red. Estos cálculos se basan en una expresión exacta de la caída de voltaje. Si la caída de voltaje (Apéndice C) en cualquier punto de carga excede los límites permitidos, las secciones de los conductores son incrementadas sistemáticamente comenzando desde la subestación de alimentación.

La restricción de caída de voltaje esta implícitamente considerada en el proceso de optimización con la inclusión en el funcional de los costos por pérdidas de energía, los cuales hacen las veces de una penalización para las caídas excesivas de voltaje, que se incrementa a medida que aumenta el costo de pérdidas de energía [Fawz83].

2.5 Modelo Propuesto para la Planificación

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{t=0}^{Tp-1} \sum_{(h,k) \in NSI} f_{hkt} x_{hkt} + \sum_{t=0}^{Tp-1} \sum_{(h,k) \in NSI} d_{hkt} y_{hkt} + \\
 & \sum_{t=0}^{Tp-1} \sum_{(h,k) \in NSE} d_{hkt} y_{hkt} + \sum_{t=0}^{Tp-1} \sum_{(r,s) \in NAI} f_{rst} [x_{rst} + x_{srt}] + \\
 & \sum_{t=0}^{Tp-1} \sum_{(r,s) \in NAI} d_{rst} [y_{rst} + y_{srt}] + \sum_{t=0}^{Tp-1} \sum_{(r,s) \in NAE} d_{rst} [y_{rst} + y_{srt}]
 \end{aligned}$$

sujeto a:

$$\sum_{i \in ND_j} [y_{ijt} - y_{jit}] = b_{jt} \quad (2.18)$$

$$0 \leq y_{hkl} \leq U_{hk} \left[\sum_{t=0}^l x_{hkt} \right] \quad \forall (h,k) \in NSI \quad y \quad l = 0, \dots, Tp - 1$$

$$0 \leq y_{hk} \leq U_{hk} \quad \forall (h,k) \in NSE$$

$$0 \leq y_{rsl} \leq U_{rs} \left[\sum_{t=0}^l x_{rst} \right] \quad \forall (r,s) \in NAI \quad y \quad l = 0, \dots, Tp - 1$$

$$0 \leq y_{rs} \leq U_{rs} \quad \forall (r,s) \in NAE$$

$$\sum_{t=0}^{Tp-1} x_{hkt} \leq 1 \quad \forall (h,k) \in NSI$$

$$\sum_{t=0}^{Tp-1} x_{rst} \leq 1 \quad \forall (r,s) \in NAI$$
$$\sum_{i \in ND_j} x_{ijt} \leq 1$$

III METODOLOGIA DE SOLUCION

3.1 Introducción

Un sistema de distribución de energía eléctrica debe ser capaz de atender la demanda prevista de manera económica y confiable. La creciente complejidad de estos sistemas ha tornado cada vez más difícil las tareas de operación y planificación, aunque por el contrario, ha permitido el desarrollo de modelos matemáticos y de herramientas computacionales para el auxilio en la toma de decisiones.

En este capítulo se presenta la metodología de descomposición de Benders para la formulación de la planificación de la expansión de un sistema de distribución presentada en el capítulo anterior.

Por último, se explica el desarrollo computacional asociado.

3.2 Descomposición de Benders

Con el objeto de simplificar la notación, sin llegar a comprometer su validez, la formulación presentada en el Capítulo 2 se reescribe a continuación como:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad cx + dy \\
 & \text{sujeto a} \\
 & \quad Ax \geq b \\
 & \quad Ex + Fy \geq h \\
 & \quad x_i \in \{0, 1\} \\
 & \quad y_i \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $c \in \mathbf{R}^n$, $d \in \mathbf{R}^q$, A y b son matrices de dimensiones $m \times n$ y $m \times 1$ respectivamente, E y F son matrices de dimension $p \times q$ y $h \in \mathbf{R}^p$.

El vector x representa las variables de construcción (decisión de ubicar una subestación, utilizar un determinado alimentador etc.); el costo total de construcción es

cx . Las restricciones relacionadas únicamente con las variables de construcción (radialidad y lógicas) son representadas por $Ax \geq b$. El vector y representa las variables de operación (flujo de potencia en los arcos); el costo total de operación es dy . Las restricciones operativas (de balance de potencia y de capacidad) están representadas por $Ex + Fy \geq h$.

El problema (3.1) es un problema de programación entera mixta, que puede descomponerse en dos estados. En el primer estado (3.2) se determina el vector x , fijándolo en valores discretizados x_i^* que satisfacen las restricciones $Ax \geq b$.

$$\begin{aligned}
 & \min \quad cx \\
 & \text{sujeto a} \\
 & \quad Ax \geq b \\
 & \quad x_i \in \{0, 1\}
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Conocidas las variables de construcción, el problema resultante es formulado únicamente en términos de las variables de operación y :

$$\begin{aligned}
 & \min \quad dy \\
 & \text{sujeto a} \\
 & \quad Fy \geq h - Ex^* \\
 & \quad y \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

El problema (3.3), correspondiente al problema de segundo estado, es de programación lineal, y en particular puede resolverse con algoritmos especializados como es el de flujos en redes. Es importante hacer notar que siempre existe una solución para el problema (3.3) de segundo estado.

El algoritmo de descomposición de Benders, presentado a continuación, es apropiado para tratar este tipo de problemas. La idea consiste en escoger un vector de variables enteras x^* tal que $Ax^* \geq b$, problema (3.2), resolver el problema lineal (3.3) y

Comentario [RSH2]: Página:
32

Comentario [RSH3]: Página:
32

utilizar información de su solución para determinar una nueva propuesta de construcción que sea "mejor" que la anterior.

La técnica de descomposición de Benders se basa en la observación de que la solución del problema de segundo estado (3.3) puede expresarse como una función de la decisión de inversión x . Así, se define la función α como:

$$\begin{aligned} \alpha(x) = \quad & \min \quad d y \\ & \text{sujeto a} \\ & \quad Fy \geq h - Ex \\ & \quad y \geq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

la cual indica que el valor óptimo de operación del sistema depende de la configuración topológica determinada por las variables de decisión x .

El problema dual asociado al problema (3.4) es:

$$\begin{aligned} \max \quad & \pi(h - Ex) \\ & \text{sujeto a} \\ & \quad F\pi \leq d \\ & \quad \pi \geq 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde π es el vector de multiplicadores simplex o variables duales correspondientes a las restricciones del problema (3.4).

Se observa que el conjunto $\Pi = \{ \pi \in \mathbf{R}^P \mid F\pi \leq d \}$ de soluciones factibles de (3.5) no depende de la decisión de construcción x . Se supone, por consistencia del problema original, que el problema (3.4) es factible y tiene solución óptima finita; por lo tanto, el dual (3.5) también es factible y tiene solución finita.

Como el dual (3.5) tiene solución óptima finita, la función objetivo asume el valor máximo en uno de los vértices del politopo Π ; por tanto se puede reescribir el problema como:

$$\max_{i=1,\dots,r} \pi^i (h - Ex) \quad (3.6)$$

donde π^i , para $i = 1, \dots, r$ son los puntos extremos del conjunto Π , o vértices que delimitan la solución dual viable.

Este problema puede ser planteado de manera equivalente como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \\ \text{sujeto a} \quad & \alpha \geq \pi^i (h - Ex) \quad i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde α es una variable escalar. Por el teorema de dualidad fuerte de la programación lineal, el valor óptimo de la función objetivo del primal (3.5) es igual al valor óptimo de la función objetivo del problema dual equivalente (3.7). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \alpha(x) = \min \quad & \alpha \\ \text{sujeto a} \quad & \alpha \geq \pi^i (h - Ex) \quad i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (3.8)$$

La función α informa las consecuencias de la decisión x en términos de los costos de las variables y . Como se observa en (3.8), el grafo de la función α es un polígono convexo, esto es, la intersección de un número finito de hiperplanos. Por lo tanto α es una función lineal por tramos como se muestra en la figura 3.1.

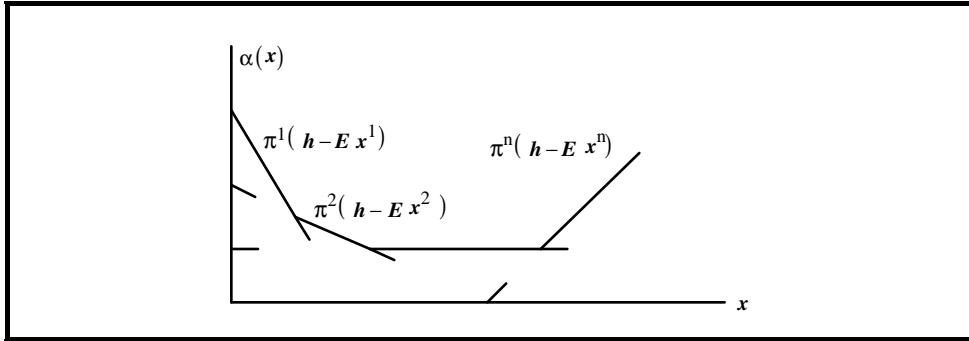


Figura 3.1: Construcción de la función $\alpha(\mathbf{x})$

Si esta función fuese conocida, el problema original (3.1) sería resuelto sin representar explícitamente las variables y :

Por tanto, el problema de construcción se transforma en:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad c x + \alpha(x) \\
 & \text{sujeto a} \\
 & \quad Ax \geq b \\
 & \quad x_i \in \{0, 1\}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

o en la forma equivalente:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad cx + \alpha \\
 & \text{sujeto a} \\
 & \quad Ax \geq b \\
 & \quad \alpha \geq \pi^i(h - Ex) \quad i = 1, \dots, r \\
 & \quad x_i \in \{0, 1\} \\
 & \quad \alpha \quad \text{irrestringido}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Se observa también que el número de restricciones del problema (3.10) puede ser muy grande dependiendo del número de vértices de Π . Sin embargo es posible

demostrar que en la solución óptima apenas algunas de las restricciones estarán activas (esto es, cumplidas en igualdad), lo que sugiere el uso de técnicas de relajación.

El algoritmo de Benders es una técnica de relajación que consiste en la solución iterativa de los problemas (3.10) y (3.4). A cada iteración, se genera uno de los hiperplanos soportes de la función $\alpha(x)$ -llamados cortes de Benders - hasta alcanzar la precisión deseada.

3.3 Algoritmo de Descomposición de Benders

El algoritmo de descomposición de Benders [Bend62] se estructura en los siguientes pasos:

paso 1: Inicialice el número de iteraciones, $k=0$ y el límite superior,

$$\bar{z} = +\infty$$

paso 2: Resuelva el problema de primer estado:

$$\begin{aligned} \min \quad & c x + \alpha \\ \text{sujeto a} \quad & \\ & Ax \geq b \\ & \alpha \geq \pi^l (h - Ex) \quad l = 0, \dots, k \\ & x_i \in \{0, 1\} \\ & \alpha \in \mathbf{R} \end{aligned} \tag{3.11}$$

paso 3: Sea (x_k^*, α_k^*) la solución óptima del problema. Calcule el límite inferior \underline{z} :

$$\underline{z} = c x_k^* + \alpha_k^* \tag{3.12}$$

paso 4: Resuelva el problema de segundo estado:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad d y \\
 & \text{sujeto a} \\
 & \quad Fy \geq h - Ex^* \\
 & \quad y \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

paso 5: Sea y_k^* la solución óptima de este problema. Calcule el límite superior \bar{z} asociado a la solución global (x_k^*, y_k^*) :

$$\bar{z} = c x_k^* + d y_k^* \tag{3.14}$$

paso 6: Si $\bar{z} - \underline{z}$ es menor que una tolerancia dada, el problema está resuelto, la solución asociada a \bar{z} es la solución óptima. En caso contrario, el vértice dual asociado al problema de segundo estado es utilizado para generar una nueva restricción, para ser incluida en el problema de primer estado. Con esto, se genera un nuevo hiperplano soporte de la función $\alpha(x)$.

$$\alpha \geq \pi^k (h - E x) \tag{3.15}$$

donde π^k es el vector de multiplicadores simplex del problema de segundo estado en la iteración k .

paso 7: Incremente el contador de iteraciones y regrese al paso 2.

Se puede demostrar, Benders [Bend62], que el algoritmo converge en un número finito de iteraciones, cuando todos los vértices necesarios para la construcción de la región deseada se han obtenido.

El algoritmo de descomposición de Benders puede ser visto como un proceso iterativo para la obtención de restricciones (3.15) que delimitan la región viable de las variables de construcción x . El problema de primer estado corresponde a una aproximación del problema de planeamiento (3.10). En cada iteración, esta aproximación

es mejorada mediante la inclusión de una nueva restricción obtenida a partir de la solución del problema de segundo estado.

Para verificar que \underline{z} y \bar{z} , definidos en el algoritmo, son el límite inferior y superior del valor óptimo de la función objetivo del problema original basta observar que, por ser (3.11) una relajación del problema original en la forma equivalente (3.10), el valor óptimo de la función objetivo \underline{z} es un límite inferior del valor óptimo del problema original. Por otro lado, a cada iteración, el par (x_k^*, y_k^*) satisface:

$$\begin{aligned} Ax_k^* &\geq b \\ Ex_k^* + Fy_k^* &\geq h \end{aligned} \quad (3.16)$$

pues x_k^* y y_k^* son soluciones de los problemas (3.11) y (3.13) respectivamente. Así, el par (x_k^*, y_k^*) es una solución factible del problema original (3.1) y por lo tanto:

$$\bar{z} = c x_k^* + d y_k^* \quad (3.17)$$

es un límite superior para el valor óptimo de la función objetivo del problema original.

Este es un aspecto atractivo del algoritmo ya que suministra a cada iteración un límite inferior y un límite superior del valor óptimo de la función objetivo, que convergen para este valor cuando se obtiene la optimalidad. Cada límite superior está asociado a una solución factible. Por lo tanto, la mejor de estas soluciones factibles puede ser escogida como solución tan cercana de la solución óptima como se quiera.

Por otra parte, es posible obtener una expresión alternativa más conveniente para los cortes de Benders, restricción (3.15), la cual se expresa en función de la solución del problema (3.13). Esta se obtiene de la igualdad entre los valores óptimos del par de problemas primal y dual (3.4) y (3.5) donde puede concluirse que es válida la relación:

$$d y^* = \pi^* (h - E x^*) \quad (3.17)$$

o en forma equivalente:

$$\pi^* h = d y^* + \pi^* E x^* \quad (3.18)$$

Sustituyendo la ecuación (3.17) en la restricción (3.19) correspondiente a un vértice π^*

$$\alpha \geq \pi^* (h - E x) \quad (3.19)$$

se llega a:

$$\alpha \geq d y^* + \pi^* E (x^* - x) \quad (3.20)$$

En Anexo B se presenta una deducción más elaborada para la obtención de esta ecuación de corte, en la cual se utiliza derivadas.

Por último, se observa que la metodología de descomposición de Benders puede aplicarse a problemas más generales. Por ejemplo, esta metodología puede resolver cualquier problema de programación convexa en la cual las variables pueden ser descompuestas en dos subconjuntos de tal forma que, fijando los valores de las variables en uno de los subconjuntos, el problema resultante tiene una estructura particular o tiene una solución más sencilla.

IV DESARROLLO COMPUTACIONAL

4.1 Introducción

En base a los modelos formulados y la metodología de descomposición de Benders se desarrolló un algoritmo computacional cuya estructura e ingreso de datos se explica a continuación.

4.2 Creación de la Base de Datos

Para la creación de la base de datos utilizada por el algoritmo, se siguen los mismos conceptos topológicos de la red visto en el Capítulo 2. Para la representación de subestaciones, se definen nodos ficticios que se unen al nodo que las identifica (figura 4.1). Si la subestación existe, al arco generado se le asigna sólo una variable continua. Si la subestación es inexistente, o se considera en ella una posible ampliación, se agregan tantos nodos ficticios como capacidades propuestas.

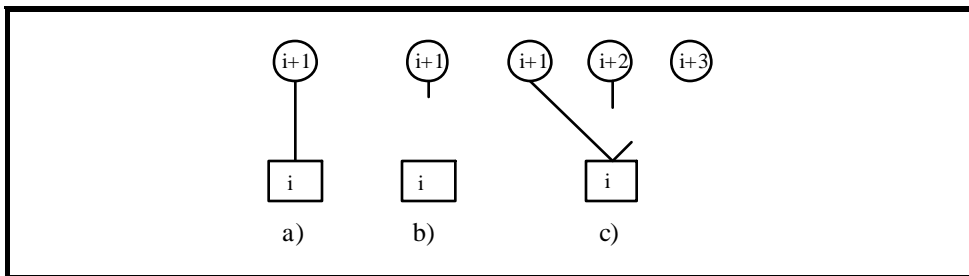


Figura 4.1: Representación de una subestación a) Subestación existente, b) Subestación propuesta y c) Ampliación, con dos capacidades propuestas

Para cada alimentador se asigna siempre dos variables continuas y en el caso que sea un alimentador propuesto se asigna además dos variables enteras. Con esta

información y mediante la introducción de un nuevo y último nodo ficticio, se crea una única red que abarca todos los años de estudio (figura 4.2).

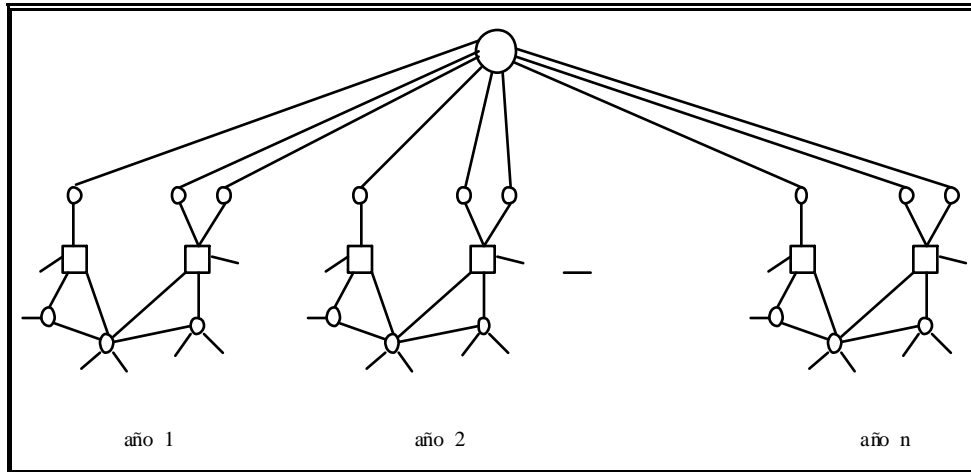


Figura 4.2: Red general de análisis

Para efecto del análisis el último nodo ficticio es el único nodo fuente, los restantes nodos ficticios son sólo nodos de transbordo, sin generación ni consumo.

Con ésta información se crea un archivo de datos con la siguiente estructura (figura 4.3).

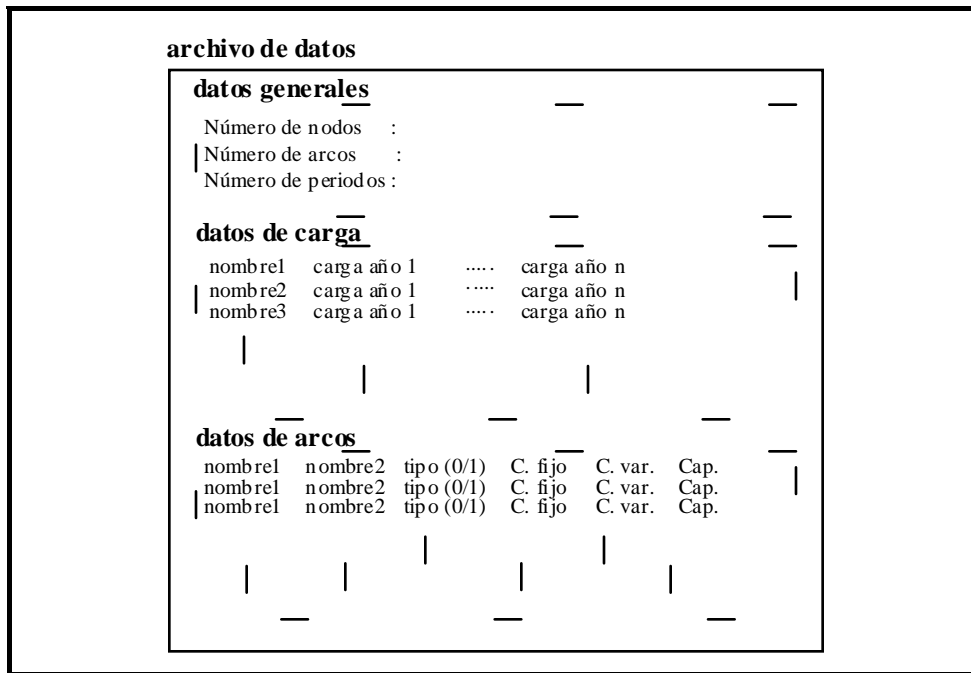


Figura 4.3: Estructura del archivo de datos

Los datos de arcos son idénticos para cada uno de los periodos, la columna tipo puede tener valores cero o uno. Si es cero el arco existe, en cambio si es uno el arco es propuesto, en este caso internamente por cada periodo se asigna dos variables enteras al arco.

4.3 Diagrama en Bloques del Algoritmo

Los principales pasos seguidos en el algoritmo se indican en la siguiente figura

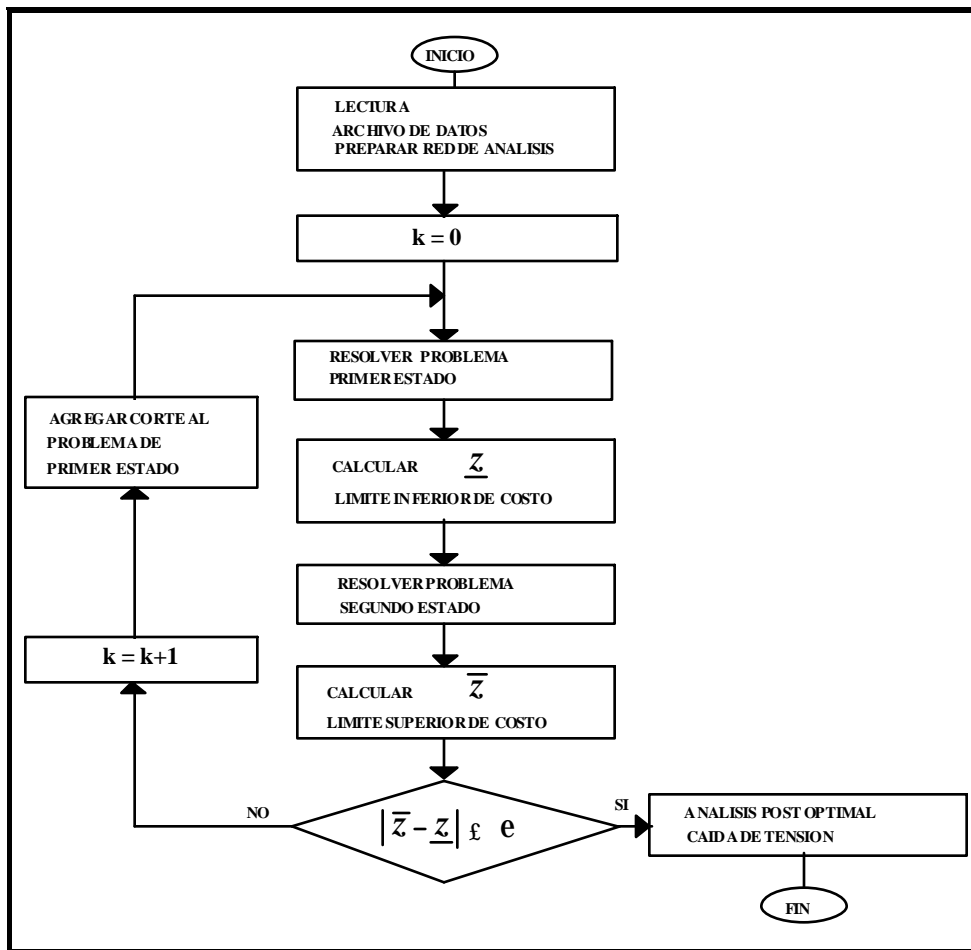


Figura 4.4: Diagrama en bloque del algoritmo

En el primer bloque la información leída desde el archivo de datos es preparada y almacenada en dos listas estructuradas. La primera lista es de característica dinámica, en ella se almacena en forma compacta los datos del problema de primer estado, esta lista crece a medida que se introduce una nueva ecuación de corte. En la segunda lista se almacenan los datos del problema de segundo estado. Ambas listas están siempre presentes en el problema.

Luego de hacer cero el contador de iteraciones se resuelve el problema de primer estado. En esta etapa se utilizan los datos contenidos en la primera lista para formular el problema de programación lineal entera. Los datos requeridos en la formulación de este problema se almacenan haciendo uso de memoria dinámica, de manera de liberarla una vez que se ha encontrado la solución al problema de primer estado. El problema de primer estado es en realidad un problema de programación entera mixta ya que contiene una variable no binaria. La solución de este problema se obtiene mediante iteraciones branch and bound sobre sucesivas soluciones de un algoritmo de programación lineal. La teoría sobre estas técnicas de programación y algunos comentarios de la implementación realizada se indican en Anexo C.

Posteriormente se calcula el límite inferior de costo y se resuelve el problema de segundo estado. Los datos utilizados en esta etapa están contenidos en la segunda lista, con ellos y con el resultado del problema de primer estado se establecen los datos necesarios para el problema de segundo estado. Estos datos también son almacenados en memoria dinámica de manera que una vez resuelto este problema se libere dicha memoria. Este problema de segundo estado se plantea como un problema de flujo en redes cuya teoría y algunos comentarios de la implementación realizada se indica en Anexo C.

Conocida la solución del problema de segundo estado se calcula el límite superior de costo, luego se determina la diferencia entre los límites superior e inferior de costo. Si esta diferencia es mayor a un error definido previamente se incrementa el contador de iteraciones y se forma una nueva restricción (corte), la cual se adiciona a la primera lista. Si por el contrario, la diferencia es menor o igual al error especificado, se ejecuta un procedimiento post optimal para determinar la sección de los nuevos tramos de alimentadores. El cálculo de las secciones se realiza teniendo como criterio la caída máxima de tensión en los alimentadores. Las secciones seleccionadas se escogen del

grupo de secciones propuestas. Las ecuaciones utilizadas para el cálculo de las caídas máximas de tensión se indican en Anexo E.

V APLICACIONES

Como aplicación y validación de la metodología propuesta, se resuelven cuatro sistemas de referencias, [Adam74], [Ponn81], [Göne86] y [Rami91]. En todos los casos las metodologías aplicadas difieren a la utilizada en este trabajo, por lo que la comparación resulta de gran interés.

5.1 Primer Sistema de Prueba

El primer sistema de prueba se obtuvo de [Adam74] y corresponde a un problema de diseño de red. El sistema consiste en una red enmallada de baja tensión compuesta de una subestación que alimenta la totalidad de los nodos de demanda y un grupo de nodos unidos por una red propuesta. De la subestación se conoce su ubicación y capacidad, por lo que no introduce variables enteras al problema. El sistema se indica en figura 5.1

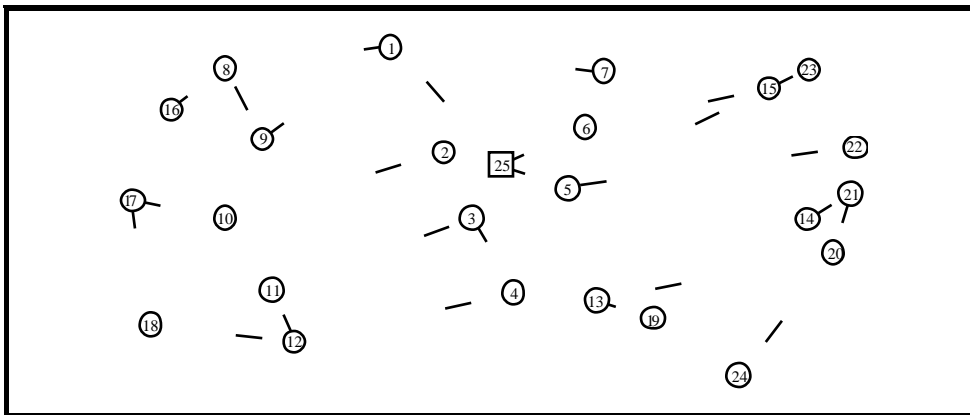


Figura 5.1: Primer sistema de prueba

La función de costo considerada en referencia para cada tramo de alimentador es:

$$c_{ij} = (1 + 0.02 y_{ij} / kW) \quad [£ / m] \quad (5.1)$$

Los datos de deamanda en los respectivos nodos pueden encontrarse en [Adam74] o en [Villa89].

Como en la referencia no se incluye información sobre los parámetros de los conductores, no se realiza un análisis post optimal para verificar las caídas máximas de tensión. A cambio de esto, se presenta un análisis detallado de cada paso del algoritmo de Benders desarrollado.

Conocidos los parámetros de la modelación, ecuación (5.1), el primer paso es definir las variables del problema. La definición de variables realizada para este sistema se encuentra en el Anexo E, donde se observa que se ha omitido la definición de variables enteras en los tramos (15,23) y (21,14) puesto que la inclusión de estos arcos en la red final es evidente.

Inicialmente el problema de primer estado contiene una única restricción, correspondiente a la ecuación de radialidad. Esta restricción se expresó en forma diferente a la indicada en (2.17), se sustituyó por la indicada en [Göne86], es decir:

$$\sum y_{ij} = n - 1 \quad (5.2)$$

la suma total de ramas contenidas en la red debe ser igual al número de nodos menos uno.

Esta forma de expresar la radialidad tiene ventajas respecto a la ecuación (2.17) ya que es sólo una ecuación, en cambio (2.17) necesita tantas ecuaciones como nodos hay en la red.

La ecuación (5.2) ha dado buenos resultados para la aplicación presentada, pero su utilización en otros ejemplos en los cuales parte de la red ya existe o que contienen demasiados nodos de transbordo, lo que es frecuente en la planificación a largo plazo, no ha dado buenos resultados. Su generalización y utilización definitiva en el modelo no se ha formalizado, dejándose para un desarrollo futuro.

De esta forma el proceso iterativo comienza resolviendo el problema de primer estado con una única restricción, ecuación (5.2). El resultado de ésta y todas las restantes iteraciones se muestra en detalle en Anexo E.

En la tabla 5.1 se muestra un resumen de la información de salida, indicándose las cotas superior e inferior de la función objetivo del problema, así como, los cortes introducidos al problema de primer estado en cada iteración. Así mismo, en la figura 5.2 se indica el proceso de convergencia del problema.

Como una manera aclaratoria se indica que en forma general los datos del problema de primer estado se amplifican por un coeficiente múltiplo de diez, como una manera de compatibilizar sus resultados con la aritmética entera utilizada en el problema de segundo estado.

Tabla 5.1: Proceso convergencia, primer sistema de prueba

iteración	$\bar{z} = c x_k^* + d y_k^*$	$\underline{z} = c x_k^* + \alpha_k^*$	ecuación de corte
1	89890	89600	$130x_1+50x_7+80x_{13}+25x_{22}+100x_{25}+100x_{26}+50x_{32}+25x_{33} \geq 340$
2	94510	94300	$40x_{11}+40x_{12}+80x_{13}+25x_{17}+135x_{18}+90x_{19} \geq 210$
3	95212	95150	$65x_{21}+25x_{22} \geq 62$
4	113292	96650	$50x_{32}+1000x_{34} \geq 16642$
5	129934	129934	

Es importante hacer notar que en las primeras tres iteraciones el problema de segundo estado finaliza en la fase uno, es decir, la propuesta de construcción indicada por la solución del problema de estado uno no proporciona una red factible (imposibilidad de satisfacer la demanda). Debido a que esto es algo frecuente, resulta interesante para un desarrollo futuro idear la formación de nuevas restricciones que eviten estas iteraciones en fase uno; en todo caso son totalmente válidas.

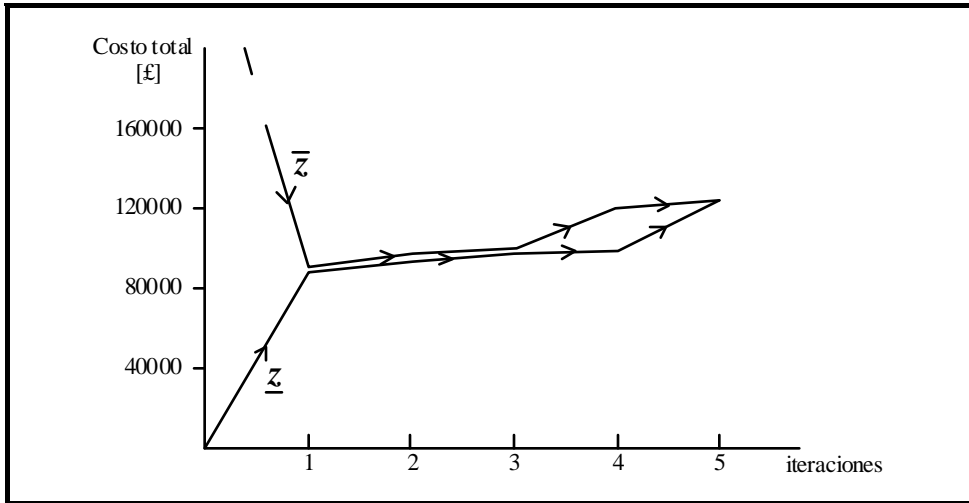


Figura 5.2: Proceso convergencia, primer sistema de prueba

La salida en fase uno del problema de segundo estado proporciona cortes cuyo significado es interesante de interpretar y analizar.

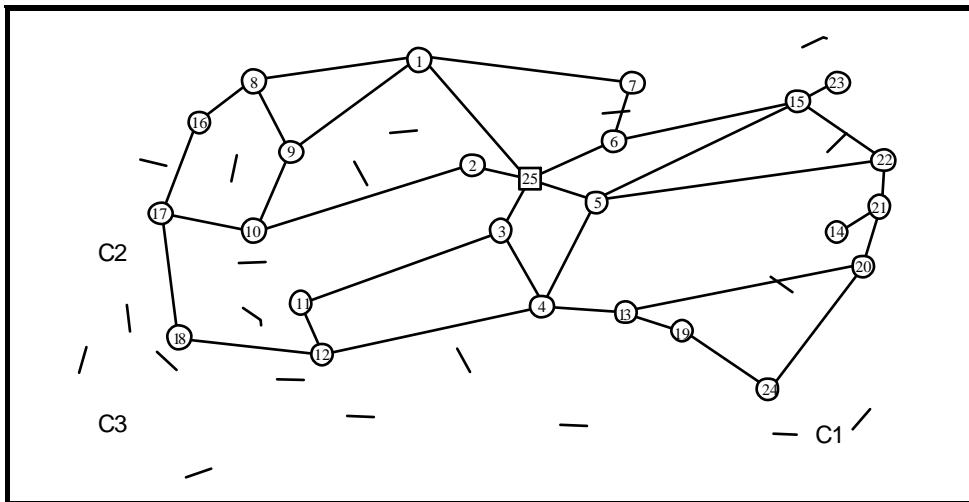


Figura 5.3: Interpretación de las ecuaciones de cortes

Para la interpretación de las ecuaciones de corte se ha dibujado sobre la red de prueba, en líneas punteadas (figura 5.3), trayectorias cerradas que cruzan los arcos cuyas variables enteras asociadas están incluidas en la correspondiente ecuación de corte. Estas trayectorias se han denominado C1, C2 y C3.

La interpretación que se le pueden dar a estos cortes es: "la suma total de las capacidades de los arcos que entran a las trayectorias cerradas (cortes) debe ser mayor que la demanda total encerrada por él". Este último valor de demanda corresponde precisamente al valor del lado derecho de la ecuación de corte.

Para la última ecuación de corte el problema de segundo estado sale en fase 2, por lo cual la variable continua α aparece en dicha ecuación. En estos casos no es fácil dar una interpretación a la ecuación puesto que la variable α no está asociada a un elemento físico de la red.

La solución óptima se muestra en figura 5.4 y los resultados que permiten confeccionarla se encuentran en Anexo E.

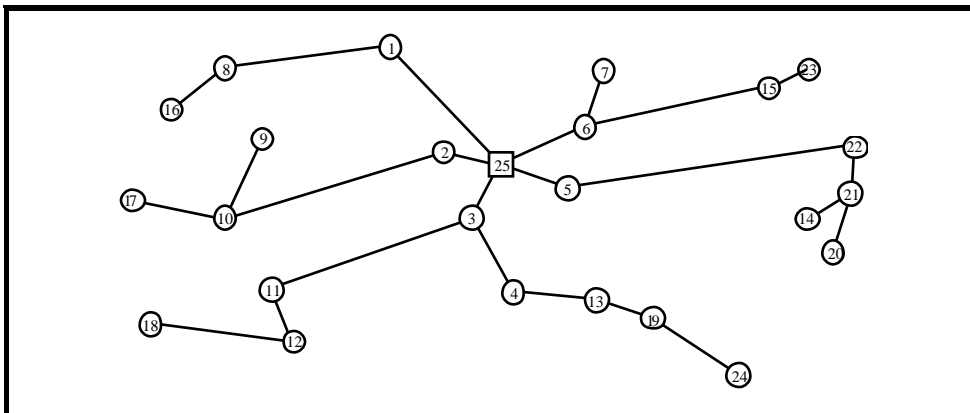


Figura 5.4: Solución óptima, primer sistema de prueba

Como una observación general y que se verifica además en este ejemplo, se comprueba que cuando las variables duales en la solución final del problema de segundo

estado son todas cero, hay una coincidencia entre las soluciones del problema entero y el problema considerado únicamente lineal. En el Anexo E, por ejemplo, la variable dual asociada al arco (13,20) es distinta de cero, esto indica que si el problema es resuelto únicamente en forma lineal [Vill89] se obtendría una solución que difiere a la presentada en figura 5.4 en tan sólo un arco (figura 5.5).

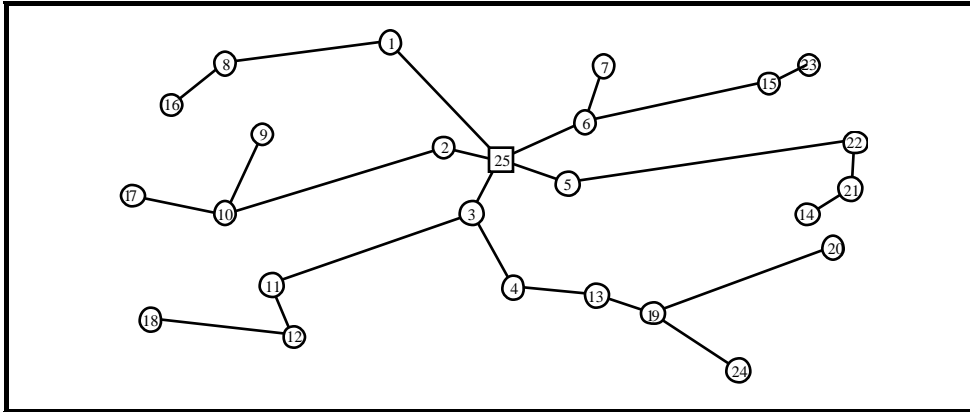


Figura 5.5: Solución óptima lineal, primer sistema de prueba

5.2 Segundo Sistema de Prueba

El segundo sistema de prueba es un sistema en 33 kV y corresponde a un problema de ubicación de subestaciones [Ponn81], en el cual se pretende determinar la mejor ubicación para una subestación entre dos posibles alternativas. El problema es considerado en naturaleza estática y se asume que la red inicial del sistema es inexistente, por lo que se pretende determinar además la topología óptima de ésta. El sistema es el que se muestra en la figura 5.6 donde se indica en tramos punteados la posible configuración de la red y con flechas la carga en los respectivos nodos.

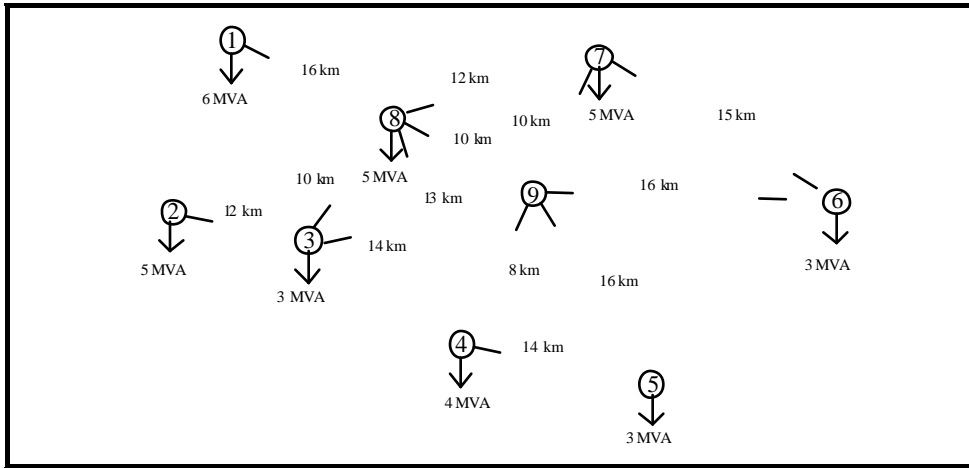


Figura 5.6: Segundo sistema de prueba

La subestación que se pretende ubicar tiene una capacidad de 50MVA y las alternativas de ubicación son los nodos 8 y 9. Los datos generales considerados en el problema se indican en la tabla 5.2

Tabla 5.2: Datos generales, segundo sistema de prueba

factor de potencia	0.90
factor de carga	0.40
vida útil de los alimentadores	20 años
costo de energía	46 [\$/kWh]
tasa de descuento	10%
sección del conductor Raven (ACSR)	105.5 MCM
cap. teórica máxima	315 [Amp]
resistencia	0.480 [Ohm/km]
reactancia	0.406 [Ohm/km]
costo subestación	160 [M\$]
costo alimentador por kilómetro	16 [M\$/km]

Para la red, se considera una única sección de conductor, Raven (ACSR), cuyas características también se indican en la tabla 5.2

De la ecuación (2.5) y de los datos dados de la tabla 5.2 se obtiene el siguiente coeficiente de costos anualizados de pérdidas para los alimentadores:

$$d_{ij} = \frac{8.76 \times 0.480}{(33)^2} \sum_{k=1}^{20} \frac{C_{ek} \times LLF_k}{(1+u)^k} = 0.3175 \left[M\$ / (MVA)^2 - km \right] \quad (5.3)$$

Los costos anualizados en función de la potencia transmitida por el conductor se ilustran en la figura 5.7

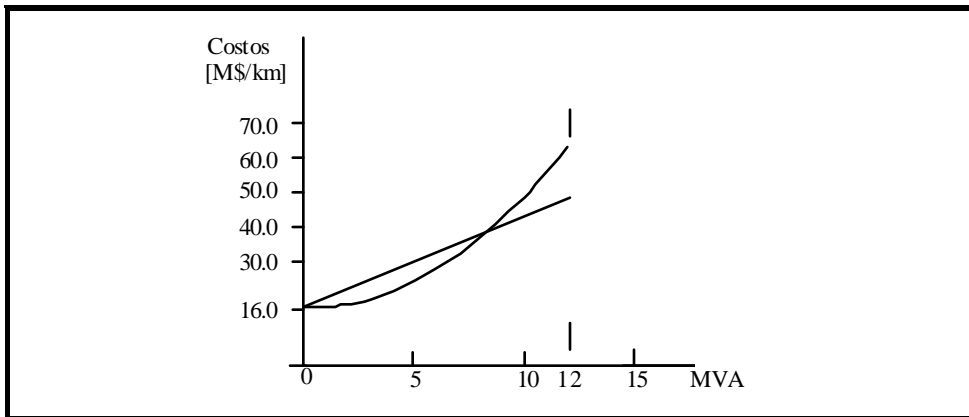


Figura. 5.7: Costos para el conductor ACSR de sección Raven

La recta en la figura corresponde a una aproximación a la curva cuadrática y es la que en definitiva permite obtener los datos de costos utilizados para los correspondientes alimentadores (tabla 5.3)

Tabla 5.3: Componentes de costos, segundo sistema de prueba

	Costo Fijo	Costo Variable
Subestación	160.0 [M\$]	2.67 [M\$/MVA]
Alimentadores	16.0 [M\$/km]	2.40 [M\$/MVA-km]

El costo variable en la subestación se obtuvo al considerar que a tres cuarto de carga del transformador hay una razón de un medio entre el costo variable y el costo fijo [Sun82].

Finalmente, de la capacidad teórica del conductor se obtiene un límite máximo aproximado de 12MVA para el flujo de potencia transmitido por cada alimentador.

La solución encontrada para este problema indica que la mejor ubicación para la subestación se encuentra en el nodo 8, en la figura 5.8 se muestra además la topología óptima para los conductores. La convergencia se obtuvo en dos iteraciones, alcanzando la función objetivo un valor óptimo de 1943.58 millones de pesos. El proceso de convergencia se muestra en la figura 5.9

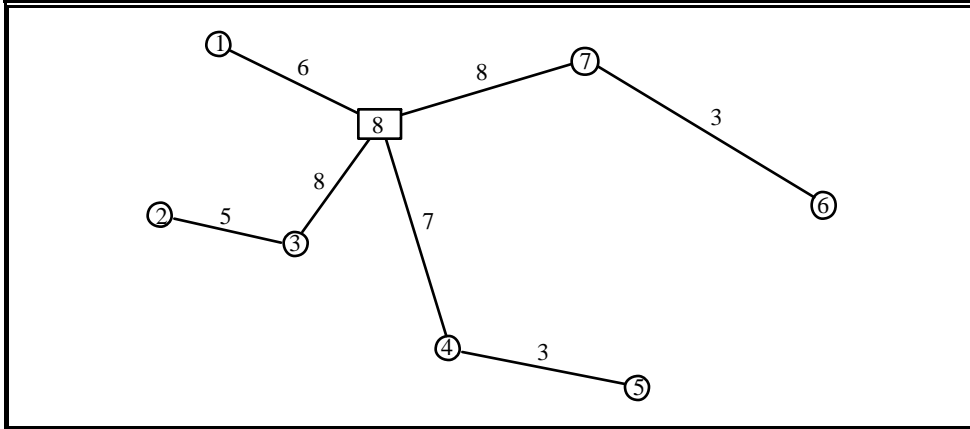


Figura 5.8: Solución óptima, primer sistema de prueba

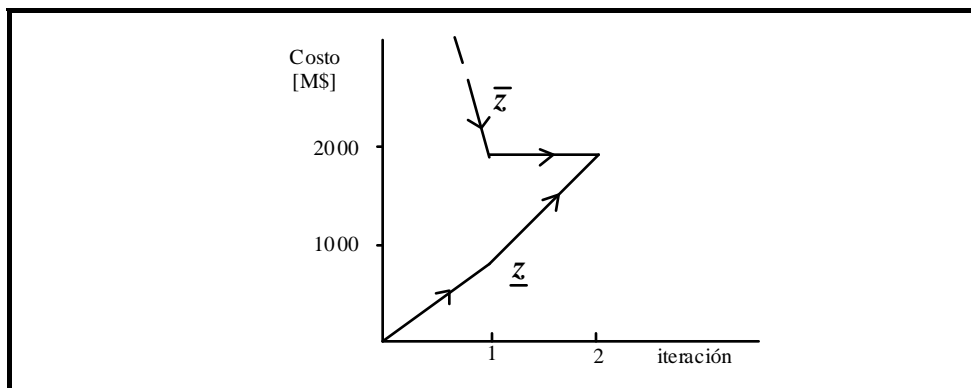


Figura. 5.9: Proceso de convergencia, segundo sistema de prueba

La solución encontrada es idéntica a la obtenida en la referencia [Ponn86], aunque el valor final de la función objetivo debiera resultar diferente debido a que en el artículo se utiliza una modelación cuadrática de los costos.

La solución se encontró rápidamente, aproximadamente diez segundos en un PC 386 de 40 MHz, y necesitó la definición de 15 variables enteras (una por cada arco y subestación). En el artículo no se menciona directamente el tiempo de ejecución aunque sí se menciona el gran número de variables internas que es necesario definir en el problema de programación cuadrática, por lo que se estima que el tiempo de ejecución no debiera ser mayor.

5.3 Tercer Sistema de Prueba

En el tercer sistema de pruebas se resuelve el problema de expansión de un sistema de distribución en 25kV, indicado en la figura 5.10, para un horizonte de 5 años. Los alimentadores existentes se indican en línea continua y en línea punteada los alimentadores propuestos. En la problemática se considera la construcción de dos nuevos alimentadores (2,11) y (7,13) y el reforzamiento de los tramos (2,3) y (15,13), así como también, la ampliación en 20 MVA de la subestación ubicada en el nodo 14. Se considera una caída máxima de tensión de 7%, a partir de la subestación.

Esta red corresponde a una simplificación de un sistema de pruebas referenciado en [Rami91] pero del cual se dispone de poca información. Las secciones de los alimentadores se sustituyeron por secciones estandarizadas cuyos parámetros si se disponen, para ello se tuvo la precaución que las capacidades máximas de flujo fuesen similares.

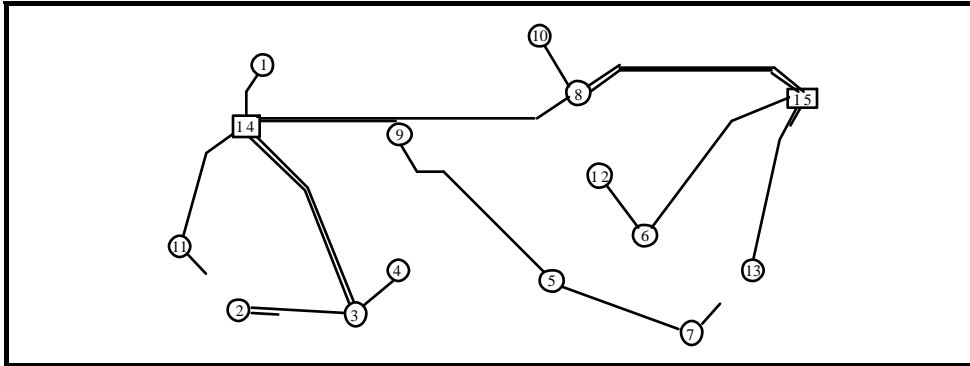


Figura 5.10: Tercera red de prueba, sistema de distribución en 25 kV.

Los datos generales y de costos anualizados considerados en el análisis, se indican en la tabla 5.4. Los datos de carga del sistema se indican en la tabla 5.5

Tabla 5.4: Datos generales para el análisis, tercer sistema de prueba

factor de potencia	0.90
factor de carga	0.40
factor de pérdidas de carga	0.20
vida útil de los equipos	30 años
tasa de descuento	10%
costo de energía	46 [\$/kWh]
costo subestación	120.0 [M\$]
costo variable subestación	4.0 [M\$/MVA]
costo alimentadores por kilómetro	12.0 [M\$/km]
costo variable alimentadores	2.8 [M\$/MVA-km]

Tabla 5.5: Demandas máximas anuales en MVA, tercer sistema de prueba

nodo	año 1	año 2	año 3	año 4	año 5
1	0.9	1.1	1.8	2.4	2.9
2	1.8	2.3	2.7	3.4	4.1
3	2.3	2.1	2.7	3.6	4.3
4	3.2	3.5	4.0	4.4	5.3
5	-	0.7	1.5	2.2	2.9
6	3.3	3.4	4.2	4.1	4.6
7	5.2	5.8	6.3	7.1	7.6
8	2.4	2.1	2.8	3.5	4.1
9	3.2	3.8	4.2	4.9	4.7
10	2.1	2.3	2.5	4.3	4.7
11	5.1	5.6	5.8	6.1	6.7
12	2.2	2.4	2.8	3.2	3.6
13	2.9	3.1	3.4	3.7	4.5
14	4.8	5.2	5.8	6.7	7.3
15	4.3	4.4	4.9	5.5	6.1

Para la determinación de los costos en los alimentadores se consideraron conductores ACSR de sección Sparrow, Robin, Raven (figura 5.17)

La solución se alcanzó en tres iteraciones y no se consideró restricciones de radialidad. Las iteraciones comenzaron directamente en fase 2 y se necesitó la formación de dos cortes, en la tabla 5.6 y la figura 5.11 se muestra el proceso de convergencia para el problema.

Tabla 5.6: Proceso de convergencia, tercer sistema de prueba

iteración	$\bar{z} = c x_k^* + y_k^*$	$\underline{z} = c x_k^* + \alpha_k^*$
1	1262	61.206
2	1448	1262
3	1448	1448

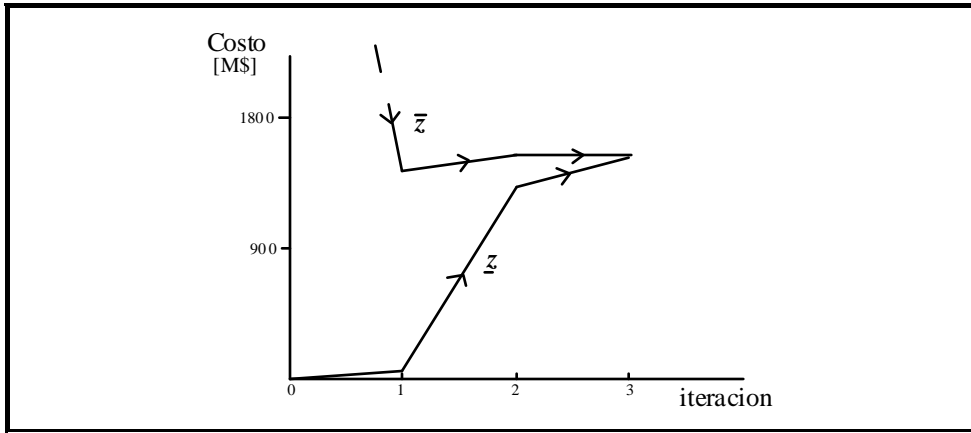


Figura 5.11: Proceso de convergencia, tercer sistema de prueba

En las figuras 5.12 a 5.17 se muestra la solución óptima alcanzada por el algoritmo en cada uno de los años.

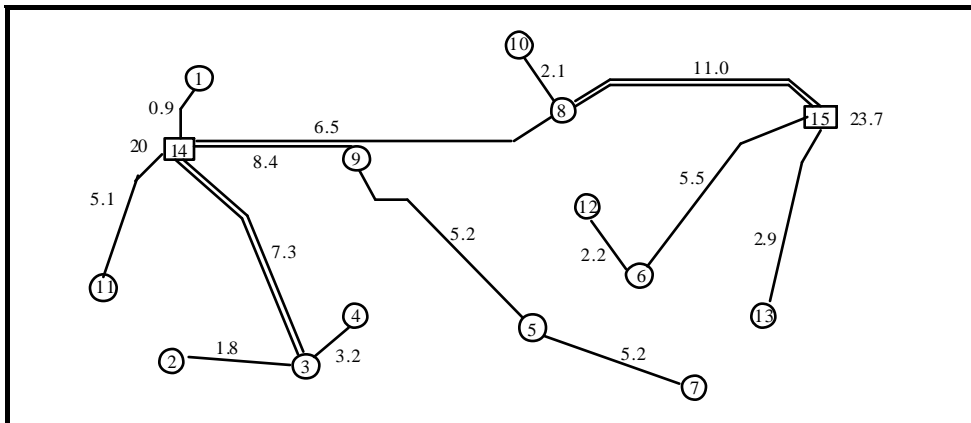


Figura 5.12: Red para el año 1, tercer sistema de prueba

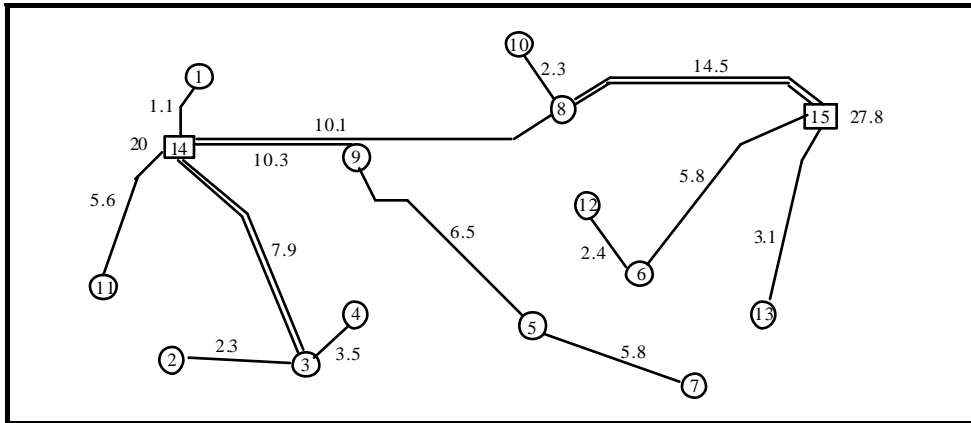


Figura 5.13: Red para el año 2, tercer sistema de prueba

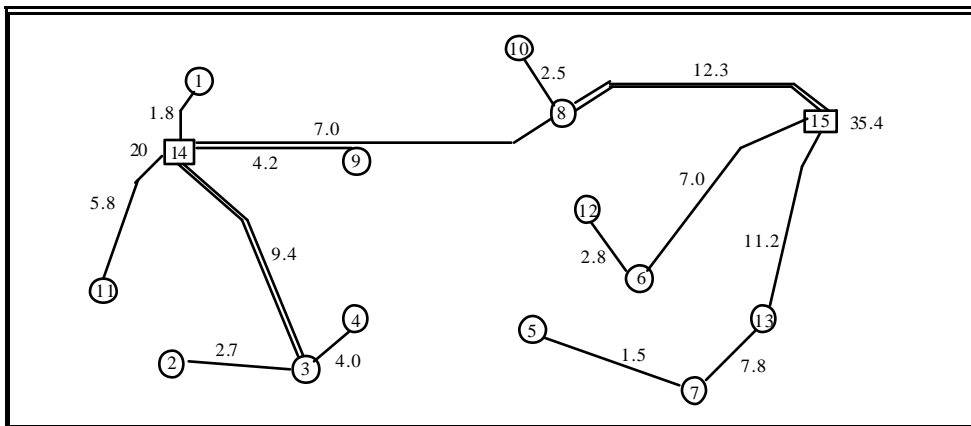


Figura 5.14: Red para el año 3, tercer sistema de prueba

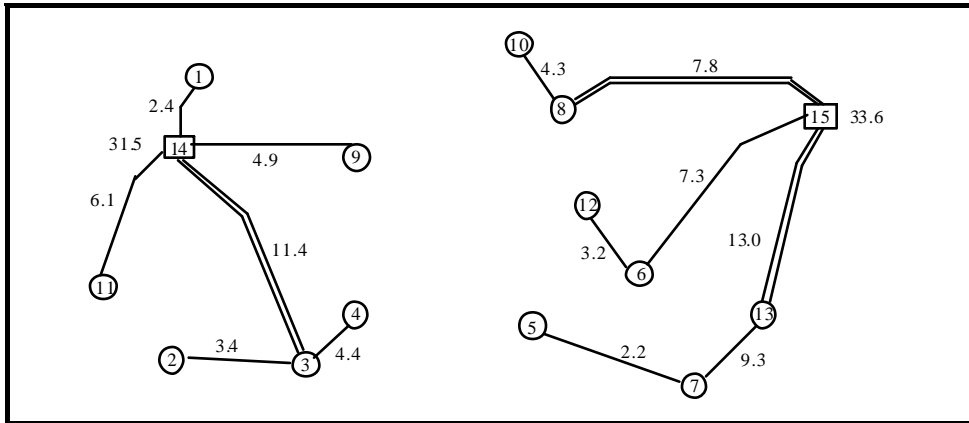


Figura 5.15: Red para el año 4, tercer sistema de prueba

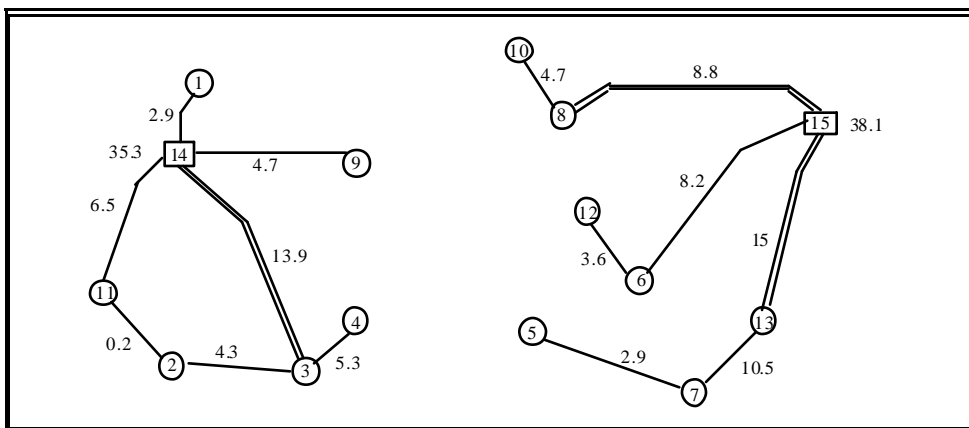


Figura 5.16: Red para el año 5, tercer sistema de prueba

Los resultados encontrados para la red de prueba, indican que prácticamente la totalidad de las decisiones se toman en el año 4. El aumento de capacidad en 20 MVA en la subestación ubicada en el nodo 14 modifica drásticamente la distribución de flujo en la red (figura 5.15), siendo necesario el reforzamiento del tramo (15,13). El

reforzamiento del tramo (2,3) no fue considerado, pero sí, el trazado de los alimentadores (13,7) y (2,11) en los años 3 y 5 respectivamente.

Una vez finalizado el proceso iterativo, se procede a determinar las secciones óptimas de los alimentadores nuevos, para ello se utiliza la información de los intervalos económicos de los conductores considerados (figura 5.17)

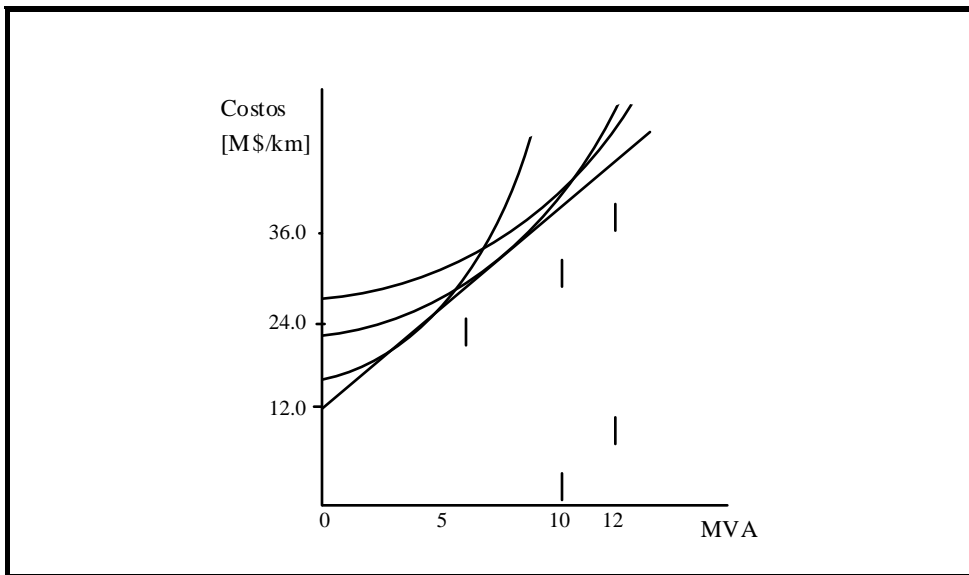


Figura 5.17: Costos de los alimentadores, tercer sistema de prueba

De acuerdo a los flujos en los arcos se determina, según el criterio de las secciones más económicas (figura 5.17) que el arco (2,11) debe tener una sección Raven y el arco (7,13) una sección Sparrow y el alimentador (15,13) se considera idéntico al existente, Raven.

Según esto, las caídas máximas de tensión en los nodos, calculadas de acuerdo a lo indicado en apéndice E, resultan las indicadas en la tabla 5.7

Tabla 5.7: Tensión en nodos, tercer sistema de prueba

nodos	año 1	año 2	año 3	año 4	año 5
1	24.95	24.94	24.91	24.87	24.85
2	24.43	24.35	24.22	24.04	23.81
3	24.58	24.55	24.46	24.35	24.20
4	24.36	24.30	24.18	24.03	23.81
5	24.31	24.15	23.99	23.45	23.16*
6	24.63	24.61	24.50	24.51	24.44
7	24.20*	24.02*	23.49*	23.23*	23.23
8	24.45	24.27	24.27	24.27	24.27
9	24.56	24.49	24.49	24.49	24.49
10	24.40	24.21	24.16	24.16	24.15
11	24.44	24.38	24.36	24.33	23.79
12	24.51	24.48	24.33	24.33	24.24
13	24.67	24.65	23.69	23.46	23.21
14	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00
15	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00

* : caídas máximas de tensión

las que se encuentran dentro de la tolerancia especificada de 7%.

5.4 Cuarto Sistema de Prueba

En el cuarto sistema de prueba [Göne86] se resuelve el problema de expansión de un sistema de distribución en 20kV, indicado en la figura 5.18, sobre un periodo de planificación de 5 años. Los alimentadores existentes se indican en línea continua y en línea punteada los alimentadores propuestos. En la problemática se considera además la ampliación en 20 MVA de la subestación ubicada en el nodo 21 y la construcción de dos nuevas subestaciones en los nodos 23 y 24 de 30 y 20 MVA respectivamente.

Para el proceso de optimización se consideró alimentadores de sección Pigeon y Piper (ACSR) en 20 kV cuyos costos son 20 000 y 35 000 dolar/km, con una capacidad máxima de 5 y 10 MVA respectivamente, un costo de 400 000 dolares para las nuevas subestaciones, costo de la energía 0.16 dolar/kWh, una tasa de descuento anual de

10%, el factor de pérdidas de carga y el factor de potencia 0.21 y 0.8 respectivamente, por último, se estimó la vida útil de los alimentadores en 25 años.

Los datos de demanda se indican en la siguiente tabla.

Tabla 5.8: Demandas máximas anuales en MVA, cuarto sistema de prueba

	año 0	año 1	año 2	año 3	año 4	año 5
1	4.63	4.05	4.43	4.85	3.45	3.78
2	0.72	0.78	0.86	0.70	0.77	0.84
3	3.37	2.58	2.83	3.09	3.38	2.78
4	0.41	0.32	0.35	0.38	0.41	0.34
5	0.26	0.28	0.31	0.34	0.37	0.33
6	1.07	1.17	1.28	1.05	0.92	1.00
7	4.10	4.04	3.09	3.38	3.70	4.05
8	0.65	0.72	0.67	0.73	0.60	0.65
9	-	1.14	1.25	1.03	1.12	1.23
10	-	1.56	1.70	1.86	2.04	2.23
11	-	-	1.67	1.78	1.91	2.05
12	-	-	-	0.88	0.93	0.99
13	-	-	-	1.12	1.15	1.18
14	-	-	-	-	3.05	2.52
15	-	-	-	-	1.62	1.62
15	-	-	-	-	-	0.94
17	-	-	-	-	2.16	2.20
18	-	-	-	-	-	1.89
19	-	-	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	-
21	7.36	7.70	8.09	8.52	9.00	9.53
22	11.30	12.06	12.87	13.74	14.68	15.67
23	-	-	-	10.02	10.02	10.02
24	-	-	-	-	-	-

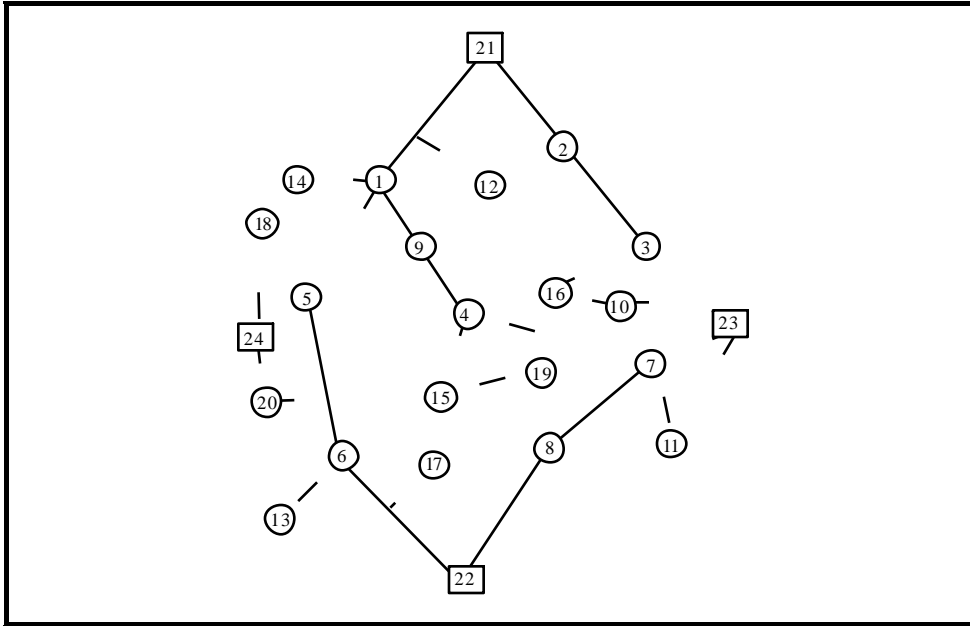


Figura 5.18: Cuarto sistema de prueba

En la solución del problema no se consideró la radialidad y para evitar exceso de iteraciones en fase uno, se introdujo ecuaciones de conectividad en los nodos. La solución se alcanzó en cinco iteraciones, en la tabla 5.8 y en la figura 5.19 se muestra el proceso de convergencia para este problema.

Tabla 5.9: Proceso de convergencia, cuarto sistema de prueba

iteración	$\bar{z} = c x_k^* + d y_k^*$	$\underline{z} = c x_k^* + \alpha_k^*$
1	3.81	1.30
2	1.36	3.68
3	1.37	3.71
4	3.85	3.72
5	3.80	3.80

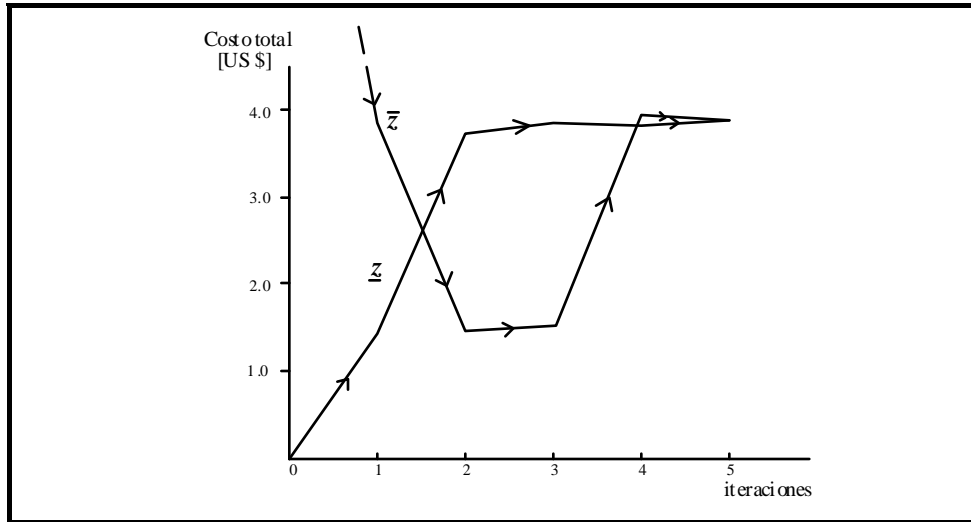


Figura 5.19: Proceso de convergencia, cuarto sistema de prueba

En las figuras 5.20 a 5.24 se muestra la solución óptima alcanzada por el algoritmo en cada uno de los años.

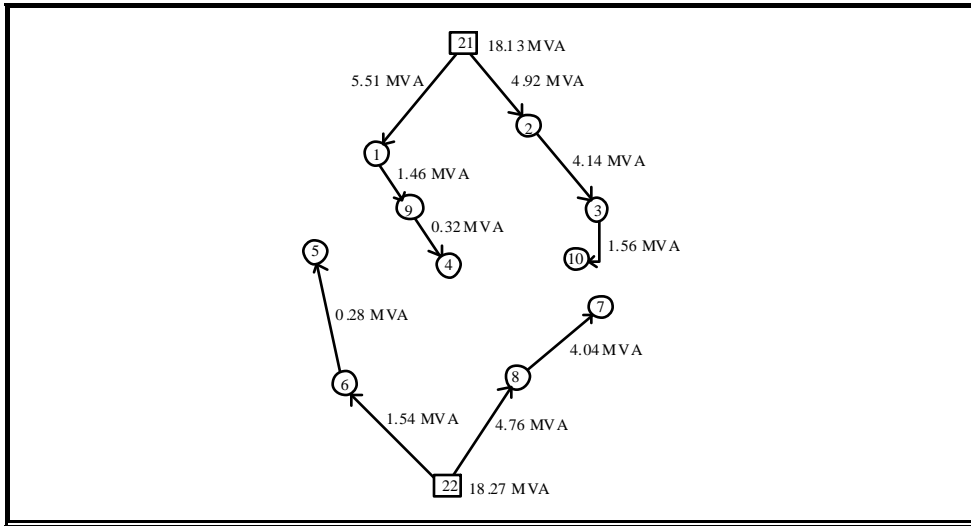


Figura 5.20: Red para el año 1, cuarto sistema de prueba

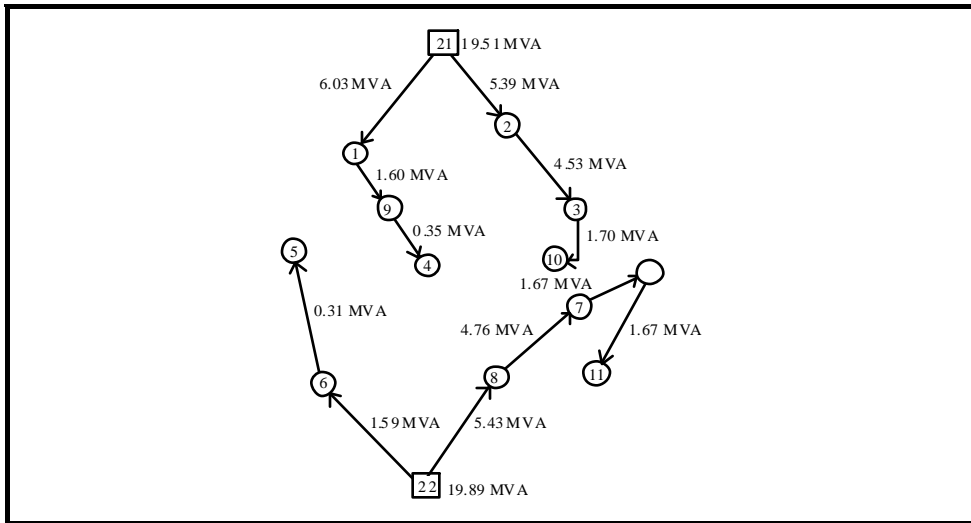


Figura 5.21: Red para el año 2, cuarto sistema de prueba

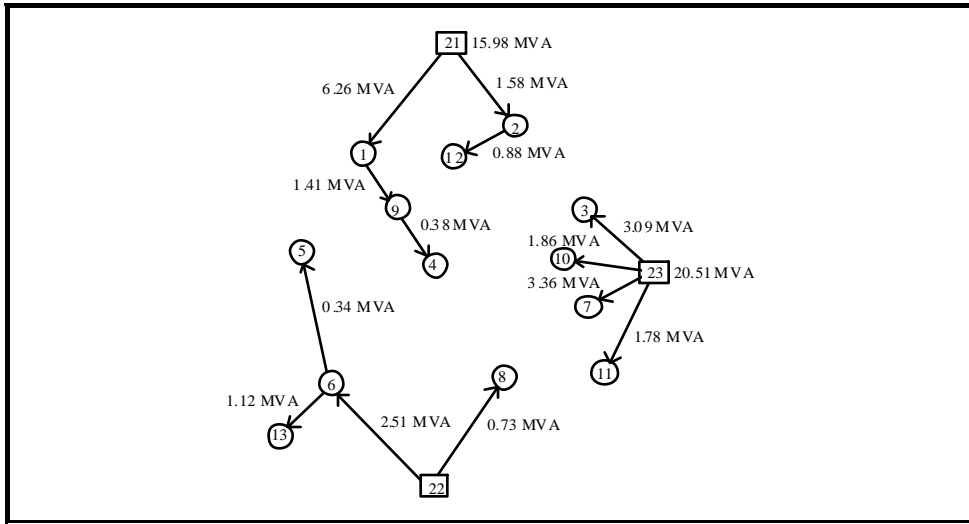


Figura 5.22: Red para el año 3, cuarto sistema de prueba

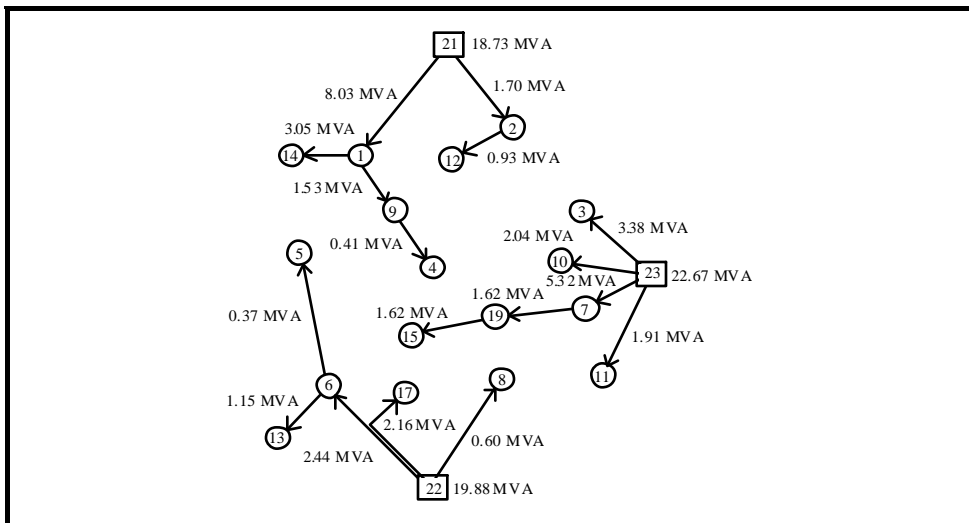


Figura 5.23: Red para el año 4, cuarto sistema de prueba

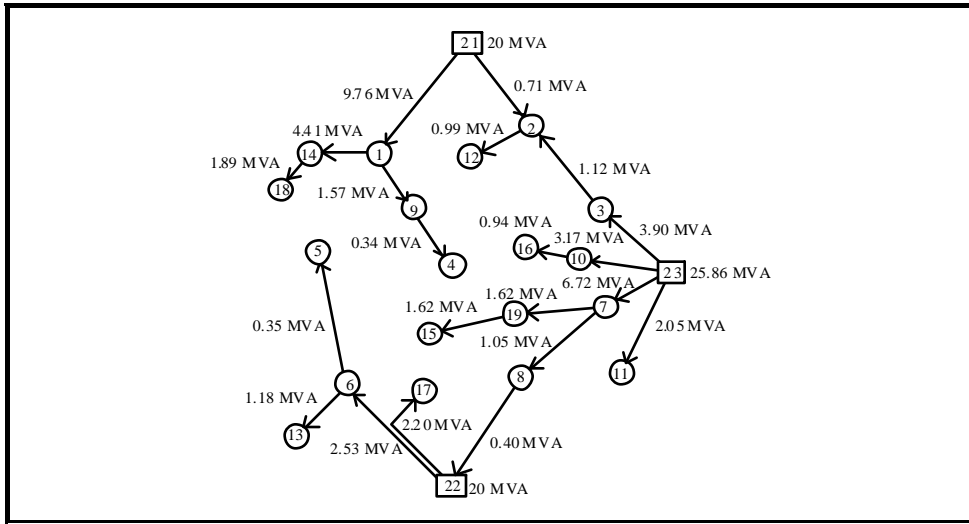


Figura 5.24: Red para el año 5, cuarto sistema de prueba

La solución se alcanzó en cinco iteraciones siendo el valor óptimo del funcional de costo igual a 3.81 (\$M). Como se aprecia en la figura (8) en las iteraciones 2 y 3 hay propuestas de construcción que resultan infactibles que provocaron una salida en fase uno del problema de segundo estado. Las caídas máximas de tensión para cada año de planificación se indica en la tabla 1.

Tabla 5.10: Caidas máximas de voltajes en porcentaje

año	nodo	caidas de voltaje
1	7	4.45
2	11	4.83
3	8	3.80
4	8	3.75
5	18	1.80

Para el problema no se consideró la restricción de radialidad, pero si fué necesario la inclusión de restricciones de conectividad, las que unidas a las restricciones

lógicas sumaron alrededor de cincuenta restricciones iniciales para el problema de primer estado.

La solución es prácticamente idéntica a la presentada en referencia, es necesario la incorporación de una subestación, la ubicada en el nodo 23, la cual entra en funcionamiento el mismo año que el indicado en referencia. Las redes para los dos primeros años resultan idénticas a las presentadas en referencia, diferenciándose la de los restantes años levemente, al tener la solución encontrada en este trabajo un menor número de arcos o tramos de alimentadores construidos, significando esto un menor valor de la función objetivo. Debe tenerse presente, eso si, que el periodo de planificación propuesto en referencia es de nueve años, a lo que sin duda se deba la diferencia.

Por último se indica que para la resolución de este problema se necesitó la definición de 160 variables enteras, requiriéndose aproximadamente unos 10 minutos en obtenerse la solución, considerando un PC 386 de 40 MHz.

VI CONCLUSIONES Y FUTUROS DESARROLLOS

6.1 Conclusiones

En la problemática de expansión se pretende determinar en forma óptima la localización, el dimensionamiento, el instante de expansión y transferencia de carga entre subestaciones, así como también, la expansión de la red de alimentadores.

El problema resultante es de programación entera-mixta, cuya función objetivo corresponde al valor presente de los costos de inversión y pérdidas de demanda y energía que tienen lugar a lo largo del periodo de estudio, la cual está sujeta a restricciones de realizabilidad, capacidad y lógicas.

La literatura especializada muestra que para la solución de este problema se ha desarrollado una gran cantidad de modelos en los que se aplican sofisticados algoritmos o bien software matemáticos estandarizados. En la gran mayoría de estos algoritmos la totalidad de las restricciones están presentes, lo cual representa una desventaja puesto que, dependiendo del sistema en estudio el número de restricciones del problema puede ser muy grande.

En este trabajo se presenta un nuevo algoritmo que aplica una técnica de relajación, algoritmo de descomposición de Benders. El algoritmo se basa en la descomposición del problema original (entero-mixto) en dos subproblemas, el primero llamado "maestro" o "problema de primer estado" que se expresa en términos de las variables complicadas del problema (variables enteras) y el segundo llamado "problema de segundo estado" cuya estructura particular tiene solución más sencilla (algoritmo de flujo en redes).

La eficacia del algoritmo radica en el hecho de que inicialmente el problema de primer estado busca la solución óptima con un reducido número de restricciones (menos que el problema original), las restantes restricciones con las cuales se ligan variables enteras y continuas (en gran número en el problema original) no participan explícitamente sino que en una forma indirecta mediante la variable dual a ella asociada (problema de segundo estado). A medida que el algoritmo progresa, con estas variables duales se crea y se agrega al problema de primer estado nuevas restricciones en cada

iteración. Así mismo, se puede eliminar aquellas restricciones que ya no aporten información para la búsqueda del óptimo (imposibilidad de que vuelvan ser activas). En definitiva, en el óptimo sólo algunas restricciones (cortes de Benders) son necesarias.

Una gran ventaja del algoritmo de Benders frente a otras metodologías de solución es que proporciona en cada iteración una cota superior e inferior de la función objetivo. Esto es una información de gran valor, sobre todo en la resolución de grandes sistemas de distribución, para los cuales el tiempo de proceso entre cada iteración es elevado. En estos casos se podría aceptar una solución intermedia no óptima, teniendo la información de qué tan buena es (o qué tan cerca se encuentra de la solución óptima) observando únicamente los valores de cota superior e inferior del óptimo.

Los resultados obtenidos al aplicar el modelo a los problemas de ejemplo son muy promisorios, los tiempos de ejecución han sido satisfactorios considerando el número de variables enteras de algunos de ellos y que todos los ejemplos fueron resueltos en un PC 386.

Se ha comprobado que el modelo propuesto para la planificación de la expansión del sistema de distribución es adecuado, aunque en general todos los modelos de planificación incluyendo éste, no presentan características de buen condicionamiento, lo que los hace propensos a la inestabilidad numérica.

Por ejemplo, el comportamiento del algoritmo implementado en aquellos sistemas que presentan gran cantidad de nodos de transbordo es inicialmente con iteraciones que dan salida del problema de segundo estado en fase uno. La efectividad de estos cortes se ve muy afectada con los valores de cotas de los flujos. Si estos valores de cota, por decir, son muy excesivos, el algoritmo realizará un elevado número de estas iteraciones, llegando frecuentemente a que el problema de primer estado se aborte por errores de ejecución como, solapamiento de información en el stack (stack overflow) o errores de punto flotante (math error). En las referencias también se citan estas dificultades, limitándose a mencionar que estos nodos deben evitarse.

Las ecuaciones de corte, con salida del problema de segundo estado en fase uno, son en general ecuaciones de conectividad, las que pueden considerarse desde un

comienzo en el modelo. En el primer y cuarto sistema de prueba se ha incluido este tipo de restricciones obteniendo buenos resultados.

La generalidad del algoritmo de Benders permite que en rigor no se necesite optimizar el problema de primer estado. Este podría sustituirse por un generador de alternativas de construcción, no necesariamente óptimas pero sí realizables, de manera que alternando con el problema de segundo estado se logre heurísticamente la convergencia.

6.2 Futuros Desarrollos

La formulación no considera directamente las restricciones de caída de voltajes. El modelo propuesto, para salvar este inconveniente, se basa en la fuerte dependencia que tiene el costo total del parámetro longitud, asumiendo que la solución debería conducir a redes de longitud mínima por lo que las caídas de voltajes en los nodos no deberían sobrepasar los límites establecidos. En todo caso, se realiza un análisis post optimal para su verificación y/o corrección.

Como desarrollo futuro inmediato resulta evidente la necesidad de incluir las restricciones de caída de voltajes en el modelo, aunque esto lleve a la necesidad de sustituir el algoritmo de flujos en redes por un algoritmo de programación lineal.

En el primer y cuarto sistema de prueba fué necesario incluir restricciones de conectividad. Estas restricciones resultaron muy efectivas para los problemas, evitando un gran número de iteraciones con salida del problema de segundo estado en fase uno. La generalización de esta restricción no es directa por la presencia de arcos existentes y nodos de transbordo, aunque merece una mayor atención para su inclusión definitiva en el modelo.

El algoritmo proporciona en cada iteración cotas de la función objetivo, las cuales podrían utilizarse como información inicial en la solución del algoritmo branch and bound del problema de primer estado. En el algoritmo implementado esta posibilidad no fué utilizada.

Finalmente, como una manera de mejorar la estabilidad al programa computacional desarrollado, sería necesario sustituir de la programación lineal implementada el algoritmo de la inversa de la base en forma de producto, por uno de descomposición LU, del cual se tiene referencias de ser numéricamente más estable.

BIBLIOGRAFIA

- [Adam74] Adams, R.N y Laughton M.A **Optimal Planning of Power Networks Using Mixed-Integer Programming**, Proc. IEE, Vol. 121, No.2, pp 139-148, Feb. 1974
- [Aoki90] Aoki, K. y otros **New Approximate Optimization Method for Distribution System Planning**, IEEE Trans. PWRs, Vol. 5, No. 1, 1990
- [Baza90] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J. y Sherali, H. D. **Linear Programming and Networks Flows**, John Wiley and Sons, 2nd ed. 1990
- [Bend62] Benders, J. F. **Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems**, Numerische Mathematik 4, 1962
- [Bloo83] Bloom, J. A. **Solving an Electricity Generating Capacity Expansion Planning Problem by Generalized Benders' Decomposition**, Operations Research, No. 31, Vol 1, pp 84-99, 1983
- [Boar72] Boardman, J. T. y Hogg, B. W. **Computer Method for the Design of Electricity Supply Networks**, Proc. IEE, 119, pp 851-856, 1972
- [Craw75] Crawford, D. M. y Holt, S.B. **A Mathematical Optimization Technique for Locating and Sizing Distribution Substations, and Deriving Their Optimal Service Areas**, IEEE Trans. Vol. PAS-94, No.2, pp 230-235, Mar./Apr. 1975.
- [El-k84] El-kady, M. A. **Computer-Aided Planning of Distribution Substation and Primary Feeders**, IEEE Trans. Vol. PAS-103, No. 6, pp 1183-1189, June 1984.
- [Fawz83] Fawzi, T. H. , Ali, k. F. y El-Sobki, S. M. **A New Planning Model for Distribution Systems**, IEEE Trans. Vol. PAS-102, No. 9, pp 3010-3017, Sep 1983.

- [Garr77] Garrett, G. P., Fukutome, A. y Chen, M. S. **Expansion Planning of Radial Subtransmission Systems**, IEEE Trans. Vol. PAS-96, No. 5, pp 1528-1534, Sep/Oct 1977.
- [Geof72] Geoffrion, A. M. **Generalized Benders Decomposition**, Journal of Optimizations Theory and Applications, Vol. 10, No. 4, 1972
- [Göne81] Gönen, T. y Foote, B. L. **Distribution-System Planning Using Mixed-Integer Programming**, IEE Proceedings, Vol. 128, No. 2, pp 70-79, Mar 1981.
- [Göne83] Gönen, T. y Mahmoud, A. A. **Bibliography of Power Distribution System Planning**, IEEE Trans. Vol. PAS-102, No. 6, pp 1778-1785, June 1983.
- [Göne86] Gönen, T. y Ramírez-Rosado, I. J. **Review of Distribution System Planning Models: A Model for Optimal Multistage Planning**, IEE Proc. Vol. 133, No. 7, pp 397-408, Nov 1986.
- [Gree76] Green, J. R. y Boardman, J. T. **Security Synthesis Algorithm for Electricity Supply Networks**, Proc. IEE, 123, pp 1213-1216, 1976
- [Hass90] Hassefield, C. W. y otros **An Automated Method for Least Cost Distribution Planning**, IEEE Trans. PWRD, Vol. 5, No. 2, 1990
- [Harn90] Harnisch, I. **Reconfiguración de Sistemas Eléctricos de Distribución**, Tesis de Magister, PUC, 1990
- [Hind77] Hindi, K. S. y Brameller, A. **Design of Low-Voltage Distribution Networks: A Mathematical Programming Method**, Proc. IEE, Vol. 124, No. 1, pp 54-58, Jan. 1977.
- [Kaga91] Kagan, N. y Adams, R. N. **Electrical Power Distribution Systems Planning Using Fuzzy Mathematical Programming**, pp 163-169, 1991

- [Kauh93] Kauhaniemi, K. **Fuzzy Models and Techniques for the Calculation of Radial Distribution Networks**, Athens Power Tech. Conference, APT 93, pp 1-6, Sep 1993
- [Kenn80] Kennington, J. L. y Helgason, R. V. **Algorithms for Network Programming**, John Wiley and Sons, 1980
- [Knig60] Knight, U. G. W. **The Logical Design of Electricity Networks Using Linear Programming Methods**, Proc. IEE, 107a, pp 306-314, 1960
- [Maki90] Makinen, A., Partanen, J. y Lakervi, E. **A Practical Approach for Estimating Future Outage Costs in Power Distribution Networks**, IEEE Trans. PWRD Vol 5, No. 1, Jan 1990
- [Mars91] Marshall, A. C. y otros **Optimal Design of Electricity Distribution Networks**, Proc.-C IEE, Vol. 138, No. 1, pp 69-77, Jan 1991.
- [Masu74] Masud, E. **An Interactive Procedure for Sizing and Timing Distribution Substations Using Optimization Techniques**, IEEE Trans. Vol. PAS-93, No.4, pp 1281-1286, Sep. 1974.
- [Miki86] Mikic, O. M. **Mathematical Dynamic Model For Long-Term Distribution System Planning**, IEEE Trans. Vol. PWRS-1, No.1, pp 34-40, Feb 1986.
- [Nara91] Nara, K. y otros **Distribution Systems Expansion Planning By Multi-Stage Branch Exchange Taking Fault Into Consideration**, IEEE Trans. PWRS, Vol. 6 No. 3, 1991
- [Nara91] Nara, K. y otros **Multi-Year Expansion Planning for Distribution Systems**, IEEE Trans. PWRS, Vol. 6, No. 3, pp 952-958, Aug 1991
- [Nara92] Nara, K. y otros **Distribution Systems Expansion Planning By Multi-Stage Branch Exchange**, IEEE Trans. PWRS, Vol. 7 No. 1, 1992

- [Lee74] Lee, S. T. Y., Hicks, K. I. y Hnylicza, E. **Transmission Expansion by Branch and Bound Integer Programming With Cost Capacity Curves**, IEEE Trans. PAS-93, pp 1390-1400, 1974
- [Part90] Partanen, J. **A Modified Dynamic Programming Algorithm for Sizing, Locating and Timing of Feeders Reinforcements**, IEEE Trans. PWRD, Vol. 5, pp 277-283, Jan 1990
- [Pint93] Pinto, L. **Optimización de Sistemas Eléctricos: Planificación y Operación**, Curso, PUC, Dic 1993.
- [Ponn81] Ponnavaikko, M. y Prakasa Rao K. S. **Optimal Distribution System Planning**, IEEE Trans. Vol. PAS-100, No. 6, pp 2969-2977, Jun 1981
- [Ponn82] Ponnavaikko, M. y Prakasa Rao, K. S. **An Approach to Optimal Distribution System Planning Through Conductor Gradation**, IEEE Trans. Vol. PAS-101, No 6, pp 1735-1742, 1982
- [Ponn87] Ponnavaikko, M., Prakasa Rao, K. S. y Venkata, S. S. **Distribution System Planning Through a Quadratic Mixed Integer Programming Approach**, IEEE Trans. PWRD-2, No. 4, pp 1157-1163, Oct 1987
- [Rami91] Ramírez-Rosado, I. J. y Gönen, T. **Pseudodynamic Planning for Expansion of Power Distribution Systems**, IEEE Trans. Vol 6, No 1, pp 245-253, Feb 1991
- [Rich75] Richards, I Boardman, J. T. **Maximin Algorithms for Interactive Synthesis of Electricity Supply Networks**, Proc. IEE, 122, pp 1235-1240, 1975
- [Sanh92] Sanhueza, R. y Díaz, H. **Diseño Optimo de Redes de Distribución Primaria**, Latincon '92, Santiago Ago. 1992
- [Sanh94] Sanhueza, R. y Rudnick, H. **Diseño de Redes de Distribución Primaria**, I Seminario de Distribución de Energía Eléctrica, USACH, Ago 1994.

- [Sun82] Sun, D. I. y otros **Optimal Distribution Substation and Primary Feeders Planning Via the Fixed Charge Network Formulation**, IEEE Trans. Vol. PAS-101, No. 3, pp 602-609, Mar 1982.
- [Sun80] Sun, D.I. y otros, **Calculation of Energy Losses in a Distribution Systems**, IEEE Trans. Vol. PAS-99, No. 4, pp 1347- 1356, July/Aug 1980.
- [Thom81] Thompson, G. L. y Wall, D. L. **A Branch and Bound Model For Choosing Optimal Substation Locations**, IEEE Trans. Vol. PAS-100, No. 5, pp 2683-2687, May 1981.
- [Villa89] Villarroel, M. **Diseño Optimo de Redes de Distribución**, Tesis de Magister, PUC., Dic. 1989
- [Wall79] Wall, D. L. y otros, **An Optimization Model for Planning Radial Distribution Networks**, IEEE Trans. Vol. PAS-98, No. 3, pp 1061-1065, May/June 1979.
- [Wild77] Wilde, R. J. y Boardman, J. T. **Interactive Design of Electricity Networks Using Spare Capacity Reinforcement Algorithms**, Proc. IEE, 124, pp 757-762, 1977
- [Will85] Willis, H. L. y Northcote-Green, J. E. D. **Comparison of Several Computerized Distribution Planning Methods**, IEEE Trans. Vol. PAS-104 No. 1, PP 233-240, Jan 1985.
- [Will85] Willis, H. L., Powell, R. W. y Vismor T. D. **A Method of Automatically Assessing Load Transfer Cost in Substation Optimization Studies**, IEEE Trans. Vol. PAS-104, No. 10, pp 2771-2778, Oct 1985.
- [Will87] Willis, H. L., Tram, H. N. y Powell, R. W. **Substation Siting and Capacity Selection Based on Diversity Maximization**, IEEE Trans. Vol. PWRS-2, No. 3, pp 692-699, Aug 1987.

- [Will87] Willis, H. L. Northcote-Green, J. y Tram, H. N. **-Computerized Distribution Planning-Data Needs and Results With Incomplete Data**, IEEE Trans. Vol PWRD-2, No. 4, pp 1228-1235, Oct 1987.
- [Will92] Willis, H. L., Tram, H. N. y Rackliffe G. B. **Short-Range Load Forecasting for Distribution System Planning - An Improved Method for Extrapolating Feeder Load Growth**, IEEE Trans. Vol. 7 No 3, pp 1306-1312, Aug 1992.
- [Yous88] Youssef, H. K. y Hackam, R. **Dynamic Solution of Distribution Planning in Intermediate Time Range**, IEEE Trans. PWRD, Vol. 3, No. 1 pp 341-348, Jan 1988.

ANEXOS

ANEXO A: MODELOS PARA LA PREDICCIÓN DE DEMANDA

Los datos de demanda son la información fundamental en la planificación de los sistemas de distribución. En [Will92] se ilustran ejemplos en que se aplican métodos convencionales para la predicción de demanda. Estos métodos son clasificados en las siguientes categorías:

- a) métodos de simulación
- b) métodos de tendencias

En las técnicas de simulación la zona de servicio de la empresa es dividida en pequeñas áreas, conformando un reticulado cuyas dimensiones varían según el grado de precisión deseado. La predicción de la carga futura en estas áreas se obtiene de relacionar sus características de consumo con patrones típicos como: residencial, comercial, industrial o combinaciones de éstos.

En el método de tendencias, se intenta extrapolar las demandas históricas máximas anuales de manera de predecir las demandas máximas futuras, para lo cual se emplean modelos de regresión.

La forma general de una regresión lineal es:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \dots + \varepsilon \quad (\text{A.1})$$

donde y es la variable de salida, x_1, \dots, x_k son las variables de la predicción, $\beta_1 \dots \beta_k$ son los parámetros del modelo y ε es el error. La estimación de los parámetros $\beta_1 \dots \beta_k$ puede obtenerse por el método de los mínimos cuadrados.

Si en el modelo se considera una única variable de predicción, como años t , la ecuación de regresión puede ser de la forma $y = \beta_0 + \beta_1 t$, aunque en la práctica este modelo no es aplicable. En [Will92] es utilizado un polinomio de tercer grado.

Generalmente, los ajustes polinomiales no dan buenos resultados más allá del rango de datos históricos por lo que muchas veces, previo al ajuste de regresión, es

necesario incluir un dato extra que represente una estimación de la demanda en el año horizonte.

Al comienzo de los primeros años la demanda tiene un crecimiento rápido, pero pronto los equipos eléctricos de los consumidores se saturan y la razón de crecimiento disminuye. Como resultado, el crecimiento de la carga sigue un comportamiento saturado. Dos modelos que consideran este fenómeno son:

a) modelo logístico

$$y = \frac{b_1}{1 + e^{-(b_2 - b_3 x)}} \quad (\text{A.2})$$

b) modelo de Gompertz

$$y = b_1 e^{-e^{-(b_2 - b_3 x)}} \quad (\text{A.3})$$

Si el valor del parámetro b_1 en (A.2), que se refiere al nivel de saturación de la curva, es subjetivamente estimado, el modelo puede transformarse a uno lineal. En caso contrario, su valor debe ser encontrado mediante sucesivos análisis de regresión.

ANEXO B: OBTENCION DE LA ECUACION DE CORTE DE BENDERS

Como se mostró en el Capítulo 3, el problema del estado dos (3.3) puede ser visto como una función de la decisión de inversión x^k , la cual puede ser formulada de manera simplificada como:

$$\begin{aligned} \alpha(x^k) = \quad & \min \quad dy \\ & \text{sujeto a} \\ & F(x^k)y \geq h - E x^k \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

La ecuación de corte de Benders puede obtenerse usando una aproximación lineal de la función convexa $\alpha(x)$ alrededor del punto $x = x^k$, a partir de la expansión de Taylor.

$$\alpha(x) \geq \alpha(x^k) + \left. \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} \right|_{x=x^k} (x - x^k) \tag{B.2}$$

De la regla de la cadena, la derivada de $\alpha(x)$ con respecto a x en el punto $x = x^k$ está dada por:

$$\left. \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} \right|_{x=x^k} = \left[\frac{\partial \alpha(x)}{\partial H(x)} \cdot \frac{\partial H(x)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha(x)}{\partial F(x)} \cdot \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right]_{x=x^k} \tag{B.3}$$

siendo $H(x) = h - Ex$, el lado derecho de las restricciones del problema (B.1)

De la teoría de la programación lineal, se sabe que la derivada de la función objetivo con respecto al lado derecho de las restricciones está dada por π^k , el vector de variables duales asociados a la solución óptima. Así:

$$\left. \frac{\partial \alpha(x)}{\partial H(x)} \right|_{x=x^k} = \pi^k \tag{B.4}$$

Por otro lado, se puede probar que:

$$\left. \frac{\partial \alpha(x)}{\partial F(x)} \right|_{x=x^k} = -\pi^k y^k \quad (\text{B.5})$$

donde y^k es la solución óptima de (3.3) para $x = x^k$.

Por lo tanto:

$$\left. \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} \right|_{x=x^k} = \pi^k \left. \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right|_{x=x^k} - \pi^k y^k \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x=x^k} \quad (\text{B.6})$$

De acuerdo a este desarrollo y considerando la extensión de la función α en el dominio de los reales, el corte de Benders puede ser expresado como:

$$\alpha(x) \geq \alpha(x^k) + \pi^k \left[\left. \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right|_{x=x^k} - y^k \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right|_{x=x^k} \right] (x - x^k) \quad (\text{B.7})$$

o bien

$$\alpha \geq d y^k + \pi^k E(x^k - x) \quad (\text{B.8})$$

que es idéntica a la indicada en (3.20)

ANEXO C: HERRAMIENTAS DE OPTIMIZACION

C.1 Algoritmo Simplex

Considerando las características lineales que presenta el modelo, la aplicación del método simplex resulta apropiado dado su sencillez y su buen comportamiento numérico. En el algoritmo general de solución implementado, su aplicación se centra en la búsqueda de soluciones enteras para el problema de primer estado, ecuación (3.2), conformando el cuerpo principal de un procedimiento de branch and bound. A continuación se describe su funcionamiento en forma de tableau y se hace referencia a algunas consideraciones especiales incluidas en su implementación.

Un problema de programación lineal puede ser escrito en su forma estándar como:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad cx \\
 & \text{sujeto a} \\
 & \quad Ax = b \\
 & \quad x \geq 0
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

donde A es una matriz de orden $m \times n$ y rango m , c y x son vectores de orden $n \times 1$.

Particionando la matriz A y los vectores c y x , en la forma $A = [B|N]$, $c = (c_B/c_N)$. En que B es una matriz cuadrada de orden $m \times m$ y rango m , denominada base, y x_B un vector denominado vector de base.

Suponiendo que se tiene una solución básica factible inicial, con base B . El problema de programación lineal puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad z \\
 & \text{sujeto a} \\
 & \quad z - c_B x_B - c_N x_N = 0 \\
 & \quad Bx_B + Nx_N = b \\
 & \quad x_B, \quad x_N \geq 0
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

De la segunda ecuación de restricción en (C.3) se tiene:

$$\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{C.3})$$

Multiplicando la ecuación (C.3) por \mathbf{c}_B y sumándole la primera ecuación de restricción en (C.2) se obtiene:

$$z + \mathbf{0}\mathbf{x}_B + (\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N)\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{C.4})$$

Como en todo instante se mantiene $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, de las ecuaciones (C.3) y (C.4) se obtiene $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ y $z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. Al mismo tiempo de las ecuaciones (C.4) y (C.5) se obtiene una adecuada representación de la solución factible básica corriente, con base \mathbf{B} , en el siguiente tableau:

	z	\mathbf{x}_B	\mathbf{x}_N	RHS	
z	1	0	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	Fila 0
\mathbf{x}_B	0	I	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	Filas de 1 a m

donde z puede considerarse como una variable básica que será minimizada. La función objetivo es referenciada como fila 0 y las restricciones van de la fila 1 a la m . Las columnas del lado derecho (RHS) denotan el valor de las variables básicas (incluido el valor de la función objetivo). Las variables básicas se identifican como las columnas del lado izquierdo.

Para la implementación el método Simplex debe considerarse como un procedimiento iterativo en que en cada iteración se necesita resolver tres sistemas de ecuaciones: $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$, $\mathbf{w}\mathbf{B} = \mathbf{c}_B$ y $\mathbf{B}\mathbf{y}_k = \mathbf{a}_k$. A continuación se presenta el algoritmo Simplex para el caso de minimización.

Inicialización:

Elegir una solución básica factible inicial, con base \mathbf{B} .

Pasos principales:

- 1 Resuelva el sistema $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$. Sea $\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ y $z = \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B$

- 2 Resuelva el sistema $wB = c_B$ (El vector w es conocido como el vector de multiplicadores simplex). Calcule $z_j - c_j = w_j a - c_j$ para todas las variables no básicas.

Sea

$$z_k - c_k = \underset{j \in R}{\text{Máximo}} z_j - c_j \quad (\text{C.5})$$

donde R es el conjunto asociado a las variables no básicas c_k . Si $z_k - c_k \leq 0$ fin, la solución factible básica corriente es óptima. En otro caso ir a 3 con x_k como la variable entrante a la base.

- 3 Resuelva el sistema $By_k = a_k \leq 0$. Si $y_k \leq 0$, detenerse con la conclusión de que la solución óptima no es acotada. Si $y_k \not\leq 0$, ir a 4.
- 4 Sea x_k la variable entrante a la base. El índice de la variable básica, x_{Br} , que limita el crecimiento de x_k se determina por el test.

$$\frac{\bar{b}}{y_{rk}} = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{Min}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} \quad (\text{C.6})$$

Actualice la base B , donde a_k reemplaza a a_{Br} , actualice el conjunto R y repetir 1.

En general una eficiente implementación del algoritmo simplex debiera converger en un número finito de pasos para la gran mayoría de problemas, aunque para ello debe incluirse adecuadas reglas para prevención de ciclajes y rodeos.

El ciclaje en general se produce cuando hay más de una variable que puede salir de la base, es decir, (C.6) se cumple con más de una variable. En estas circunstancias podría suceder que el procedimiento iterativo quede atrapado en un loop. Para la prevención de ciclos existen en general varios métodos, uno de ellos es la regla lexicográfica.

En la regla lexicográfica el índice r de la variable x_{Br} , que deja la base se determina de:

$$I_0 = \left\{ r: \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{Mínimo}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}: y_{ik} > 0 \right\} \right\} \quad (C.7)$$

Si I_0 es un singleton, $I_0 = \{r\}$, entonces x_{Br} deja la base, en caso contrario se determina I_1 .

$$I_1 = \left\{ r: \frac{y_{r1}}{y_{rk}} = \underset{i \in I_0}{\text{Mínimo}} \left\{ \frac{y_{i1}}{y_{ik}} \right\} \right\} \quad (C.7)$$

Si I_1 , es un singleton, $I_1 = \{r\}$, entonces x_{Br} deja la base, en caso contrario se determina I_2 . En general I_j es formada a partir de I_{j-1} como:

$$I_j = \left\{ r: \frac{y_{rj}}{y_{rk}} = \underset{i \in I_{j-1}}{\text{Mínimo}} \left\{ \frac{y_{ij}}{y_{ik}} \right\} \right\} \quad (C.8)$$

La regla lexicográfica asegura que antes que se sobrepase la columna m de la base se romperá la indecisión y habrá una única variable para ingresar a la base. La demostración de esta regla lexicográfica se basa en la existencia de B^{-1} y por ende en la independencia de sus filas [Baza90].

La regla lexicográfica aunque eficiente tiene el inconveniente de ser muy cara computacionalmente. En la implementación realizada se adoptó un método menos académico pero no menos eficiente que es el de perturbar el lado derecho de las ecuaciones que llegan en igualdad de condiciones para entrar a la base.

Como la utilización del algoritmo de programación lineal en el programa desarrollado se enfoca como parte de un proceso de branch and bound, se le incorporó a su implementación el trabajo con variables acotadas.

La implementación del simplex se basó fundamentalmente en [Baza90] siguiendo el procedimiento de la base en forma de producto. Se mantuvo un

almacenamiento compacto del tableau y de la base, para ello se definió un almacenamiento tipo tabla Hash. Gráficamente la tabla tiene la siguiente forma:

clave	contenido

La tabla se organizó con elementos formados por los miembros clave y contenido.

La clave constituye el medio de acceso a la tabla. Aplicando a la clave una función de acceso "*fa*", previamente definida, se obtiene un número entero positivo $i = fa(\text{clave})$, que da la posición del elemento correspondiente, dentro de la tabla. Conociendo la posición, se obtiene acceso al contenido.

Siguiendo este esquema se almacenó por columnas el tableau y la inversa de la base en forma de producto.

C.2 Algoritmo de Programación Entera

El algoritmo de programación entera realizado es, en general, un algoritmo de programación lineal con el requerimiento de que algunas variables sean enteras. En su realización se siguió una estrategia de branch and bound cuyos pasos se indican a continuación.

aproximación:

Ignorando el requerimiento de variables binarias resolver el problema lineal. Si la solución lineal resultante tiene todas las variables binarias con valores 0/1, entonces esta solución es la solución óptima del programa entero.

branch:

Si la aproximación contiene una variable binaria con valores que no sean 0/1, por decir x_i , se generan dos nuevos problemas al problema entero original al agregar una u otra de las siguientes restricciones: $x_i \leq 1$, $x_i \geq 0$. Este proceso *branch* tiene como objetivo reducir el conjunto de soluciones factibles original de forma de eliminar de consideraciones posteriores la solución anterior no entera para x_i , pero conservando todas las posibles soluciones 0/1 al problema original.

Para los dos nuevos problemas creados se obtiene una *aproximación* ignorando nuevamente los requerimientos de variables binarias. Si cualquiera de las dos aproximaciones es todavía no 0/1, entonces el problema que las produjo se vuelve candidato para el próximo proceso *branch*.

bound:

El proceso *branch* se continúa hasta que se obtiene una primera aproximación con todas las variables binarias en 0/1. El valor de la función objetivo para esta primera solución entera se vuelve una cota superior (se considera un problema de minimización) para el problema y todos los problemas cuyas primeras aproximaciones, enteras o no, den valores para la función objetivo mayores que la cota superior.

El proceso *branch* se continúa a partir de aquellos problemas que tengan primera aproximación no entera y den valores de la función objetivo menor que la cota superior. Si durante este proceso se encuentra una nueva solución que tenga un valor de la función objetivo menor que la cota superior actual, entonces este valor de la función objetivo se vuelve una nueva cota superior. El problema que proporcionó la última cota superior se elimina, así como todos aquellos problemas cuyas aproximaciones dan valor de la función objetivo mayor que la nueva cota superior. El proceso *branch* continúa hasta que ya no haya problemas con solución no entera que considerar. En este punto, la solución actual de cota superior es la solución óptima del problema 0/1 original.

C.3 Algoritmo de Flujo en Redes

Para resolver el problema de segundo estado, ecuación (3.2), se implementó un algoritmo Simplex especializado, el cual ejecuta directamente las operaciones Simplex en el grafo. La particularidad que presenta esta implementación es su gran eficiencia, ya que si se le compara con un algoritmo simplex estándar, sin características especiales de implementación, puede ser 200 a 300 veces más rápido, [Baza90] y [Wall79].

Matemáticamente este problema se plantea como:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\
 \text{sujeto a} \quad & \\
 & \sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = b_i \quad i = 1, \dots, m \\
 & L_{ij} \leq x_{ij} \leq U_{ij} \quad i, j = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

La primera restricción en (C.9) corresponde a la conservación de flujo donde el término $\sum_{j=1}^m x_{ij}$ representa el flujo total que sale del nodo i mientras que $\sum_{k=1}^m x_{ki}$ indica el flujo que entra al nodo i . Estas ecuaciones requieren que el flujo neto de salida en el nodo i , $\sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki}$, debe ser igual a b_i .

La matriz A asociada a los coeficientes de las restricciones (C.9) tiene una fila por cada nodo de la red y una columna por cada arco. Cada columna contiene exactamente dos coeficientes distintos de cero, un "+1" y un "-1". Esta matriz A es llamada matriz de incidencia nodo arco.

El rango de la matriz A es $(m-1)$ y puesto que el método simplex trabaja siempre con una matriz de restricciones de rango completo, se introduce una variable artificial, comúnmente en el nodo m .

Como cada base contiene m columnas linealmente independientes, esta nueva variable artificial estará siempre presente en la base. La nueva columna puede ser vista

como un arco que comienza en el nodo m y termina en el aire. Este arco terminal es llamado arco raíz y el nodo asociado m es llamado nodo raíz.

El algoritmo implementado se resume en los siguientes pasos:

Inicialización:

Encontrar una base factible inicial representada por un árbol enraizado, con r como el nodo raíz. Calcular los flujos básicos x_B y las variables duales w asociada a este árbol base.

Principal:

Calcular $\delta_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$ para todo arco no básico (i,j) .

Si:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= u_{ij} \quad y \quad z_{ij} - c_{ij} \geq 0 \\ x_{ij} &= u_{ij} \quad y \quad z_{ij} - c_{ij} \leq 0 \end{aligned} \tag{C.10}$$

entonces, la solución básica corriente es óptima, en otro caso introducir el arco (i,j) al árbol base y determinar el único ciclo formado por la cadena básica que une el nodo i con el nodo j . Encontrar el máximo flujo $\Delta \geq 0$ que puede establecerse en este ciclo (en la orientación del arco entrante si x_{ij} aumenta desde su cota inferior o en la orientación opuesta si x_{ij} disminuye desde su cota superior). Si $\Delta \rightarrow \infty$, detenerse, el problema no es acotado. Si Δ es finito, determinar la variable saliente (arco (u,v) que bloquea el crecimiento de Δ). Actualice los flujos en el ciclo según Δ . Desconectar (u,v) del árbol base y descomponerlo en dos árboles T1 y T2 donde el nodo raíz $r \in T1$. Actualice el árbol básico agregando arco (i,j) . Actualice las variables duales ya sea aumentando o disminuyendo el valor de las variables duales en los nodos de T2 por δ_{ij} , dependiendo si es i o j el nodo raíz de T2.

Repetir principal.

En la implementación de este algoritmo se basó en las indicaciones encontradas en [Baza90] y [Kenn80]. Para la actualización de la base (rerooting), uno de

los pasos fundamentales en algoritmo, se consideró un índice para el recorrido inverso del árbol (reverse thread index). Los problemas de ciclaje se evitaron manteniendo siempre una base fuerte [Baza90].

ANEXO D: CALCULO DE CAIDA DE TENSION

Una vez que se ha seleccionado la sección de los conductores para los alimentadores nuevos, se procede a determinar las caída de tensión en los nodos de la red. Para ello se tiene como información el flujo de potencia resultante en cada arco.

La tensión en un nodo q de un sistema trifásico equilibrado, el cual recibe un flujo de potencia s desde un nodo p , (figura D.1) puede deducirse del diagrama fasorial de la figura D.2.

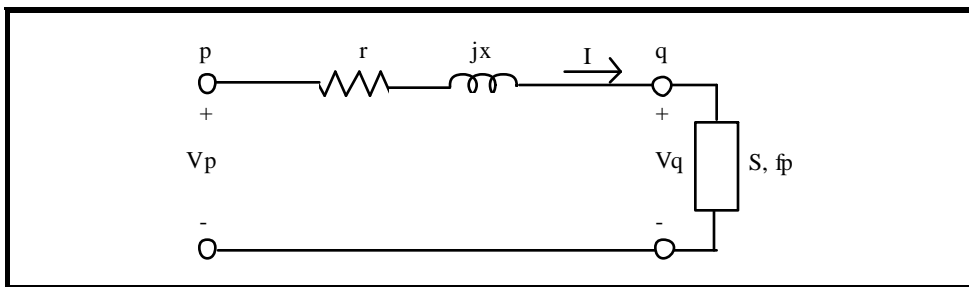


Figura D.1: Modelo circuital equivalente de un alimentador

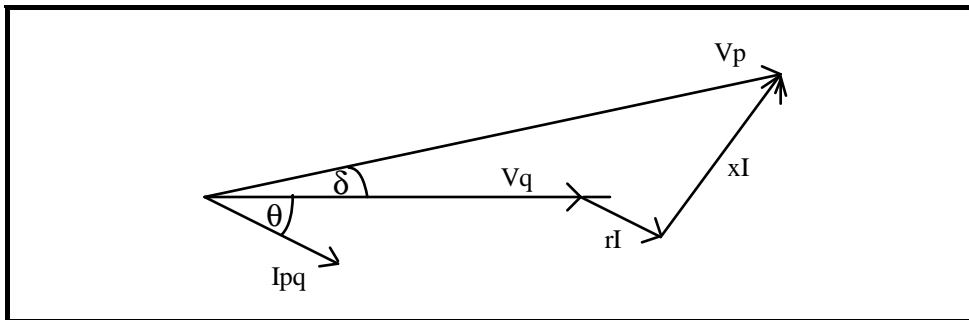


Figura D.2: Diagrama fasorial del circuito equivalente

Como se conoce la potencia aparente transmitida s , la admitancia y_{pq} del modelo, y el factor de potencia (en atraso) para toda la red, se deduce del diagrama fasorial de la figura D.2

$$V_p^2 = \left(V_q + \frac{(r\gamma + x\sqrt{1-\gamma^2})s}{V_q} \right)^2 + \left(\frac{(x\gamma - r\sqrt{1-\gamma^2})s}{V_q} \right)^2 \quad (D.1)$$

donde r , x son los parámetros resistencia y reactancia del alimentador, s la potencia transmitida por el alimentador en [VA], γ es el factor de potencia y V_p y V_q las tensiones en los nodos p y q respectivamente.

De la ecuación D.1 se desprende finalmente

$$V_q = \sqrt{\frac{\left(V_p^2 - 2(r\gamma + x\sqrt{1-\gamma^2})s \right) + \sqrt{\left(V_p^2 - 2(r\gamma + x\sqrt{1-\gamma^2})s \right)^2 - 4s^2(r^2 + x^2)}}{2}} \quad (D.2)$$

La ecuación D.2 permite realizar cálculos sumamente precisos y rápidos. La precisión, eso sí, depende de que tan ciertas sean las suposiciones realizadas.

El programa que realiza estos cálculos determina para cada año las tensiones en los nodos, encontrando para cada año aquel nodo con tensión más baja. Esta tensión más baja no debe ser superior al porcentaje de caída permitido desde la subestación. De no respetarse esta restricción el programa sugiere los alimentadores que deben reforzarse o bien cambiar de sección de conductor

ANEXO E: RESULTADOS DEL PRIMER SISTEMA DE PRUEBA

La definición de variables para el primer sistema de prueba es la que se indica en la siguiente tabla.

Tabla E.1: Definición de variables para el primer sistema de prueba

desde nodo	hacia nodo	variable entera	variable continua
25	1	x_1	y_1
25	2	x_2	y_2
25	3	x_3	y_3
25	5	x_4	y_4
25	6	x_5	y_5
3	4	x_6	y_6
6	7	x_7	y_7
1	7	x_8	y_8
4	5	x_9	y_9
1	8	x_{10}	y_{10}
8	9	x_{11}	y_{11}
1	9	x_{12}	y_{12}
2	10	x_{13}	y_{13}
9	10	x_{14}	y_{14}
8	16	x_{15}	y_{15}
10	17	x_{16}	y_{16}
16	17	x_{17}	y_{17}
3	11	x_{18}	y_{18}
4	12	x_{19}	y_{19}
11	12	x_{20}	y_{20}
12	18	x_{21}	y_{21}
17	18	x_{22}	y_{22}
6	15	x_{23}	y_{23}
5	15	x_{24}	y_{24}
5	22	x_{25}	y_{25}
15	22	x_{26}	y_{26}
21	22	x_{27}	y_{27}
20	21	x_{28}	y_{28}
4	13	x_{29}	y_{29}
13	19	x_{30}	y_{30}
19	24	x_{31}	y_{31}
13	20	x_{32}	y_{32}
20	24	x_{33}	y_{33}

Listado de salida del primer sistema de prueba.

Valor de la funcion objetivo problema de primer estado:	89600
x_ 1	0
x_ 2	1
x_ 3	1
x_ 4	1
x_ 5	1
x_ 6	1
x_ 7	1
x_ 8	1
x_ 9	1
x_ 10	1
x_ 11	0
x_ 12	1
x_ 13	0
x_ 14	1
x_ 15	1
x_ 16	1
x_ 17	0
x_ 18	1
x_ 19	0
x_ 20	1
x_ 21	1
x_ 22	0
x_ 23	1
x_ 24	0
x_ 25	0
x_ 26	0
x_ 27	1
x_ 28	1
x_ 29	1
x_ 30	1

x_ 31	1
x_ 32	0
x_ 33	0
x_ 34	0

Valor de la funcion objetivo problema segundo estado: 290

Solucion en fase I

Variables duales

d_ 1	1
d_ 2	0
d_ 3	0
d_ 4	0
d_ 5	0
d_ 6	0
d_ 7	1
d_ 8	0
d_ 9	0
d_ 10	0
d_ 11	0
d_ 12	0
d_ 13	1
d_ 14	0
d_ 15	0
d_ 16	0
d_ 17	0
d_ 18	0
d_ 19	0
d_ 20	0
d_ 21	0
d_ 22	1
d_ 23	0
d_ 24	0
d_ 25	1

d_ 26	1
d_ 27	0
d_ 28	0
d_ 29	0
d_ 30	0
d_ 31	0
d_ 32	1
d_ 33	1

Corte Nro 1

x_ 1	130
x_ 7	50
x_ 13	80
x_ 22	25
x_ 25	100
x_ 26	100
x_ 32	50
x_ 33	25
rhs	340

Valor de la funcion objetivo problema de primer estado: 94350

x_ 1	1
x_ 2	1
x_ 3	1
x_ 4	1
x_ 5	1
x_ 6	1
x_ 7	1
x_ 8	0
x_ 9	1
x_ 10	1
x_ 11	0
x_ 12	0

x_13	0
x_14	1
x_15	1
x_16	1
x_17	0
x_18	0
x_19	0
x_20	1
x_21	0
x_22	1
x_23	1
x_24	0
x_25	1
x_26	0
x_27	1
x_28	1
x_29	1
x_30	1
x_31	1
x_32	1
x_33	0
x_34	0

Valor de la funcion objetivo problema segundo estado: 210

Solucion en fase I

Variables duales

d_1	0
d_2	0
d_3	0
d_4	0
d_5	0
d_6	0
d_7	0

d_ 8	0
d_ 9	0
d_ 10	0
d_ 11	1
d_ 12	1
d_ 13	1
d_ 14	0
d_ 15	0
d_ 16	0
d_ 17	1
d_ 18	1
d_ 19	1
d_ 20	0
d_ 21	0
d_ 22	0
d_ 23	0
d_ 24	0
d_ 25	0
d_ 26	0
d_ 27	0
d_ 28	0
d_ 29	0
d_ 30	0
d_ 31	0
d_ 32	0
d_ 33	0

Corte Nro 2

x_ 11	40
x_ 12	40
x_ 13	80
x_ 17	25
x_ 18	135

x_19	90
rhs	210

Valor de la funcion objetivo problema de primer estado: 95150

x_1	1
x_2	1
x_3	1
x_4	1
x_5	1
x_6	1
x_7	1
x_8	0
x_9	1
x_10	1
x_11	0
x_12	0
x_13	1
x_14	1
x_15	1
x_16	1
x_17	0
x_18	1
x_19	0
x_20	1
x_21	0
x_22	0
x_23	1
x_24	0
x_25	1
x_26	0
x_27	1
x_28	1
x_29	1

x_30	1
x_31	1
x_32	0
x_33	0
x_34	0

Valor de la funcion objetivo problema segundo estado:

62

Solucion en fase I

Variables duales

d_ 1	0
d_ 2	0
d_ 3	0
d_ 4	0
d_ 5	0
d_ 6	0
d_ 7	0
d_ 8	0
d_ 9	0
d_ 10	0
d_ 11	0
d_ 12	0
d_ 13	0
d_ 14	0
d_ 15	0
d_ 16	0
d_ 17	0
d_ 18	0
d_ 19	0
d_ 20	0
d_ 21	1
d_ 22	1
d_ 23	0
d_ 24	0

d_25	0
d_26	0
d_27	0
d_28	0
d_29	0
d_30	0
d_31	0
d_32	0
d_33	0

Corte Nro 3

x_21	65
x_22	25
rhs	62

Valor de la funcion objetivo problema de primer estado: 96650

x_1	1
x_2	1
x_3	1
x_4	1
x_5	1
x_6	1
x_7	1
x_8	0
x_9	0
x_10	1
x_11	0
x_12	0
x_13	1
x_14	1
x_15	1
x_16	1
x_17	0

x_ 18	1
x_ 19	0
x_ 20	1
x_ 21	1
x_ 22	0
x_ 23	1
x_ 24	0
x_ 25	1
x_ 26	0
x_ 27	1
x_ 28	1
x_ 29	1
x_ 30	1
x_ 31	1
x_ 32	0
x_ 33	0
x_ 34	0

Valor de la funcion objetivo problema segundo estado:

16642

Solucion en fase II

Variables duales

d_ 1	0
d_ 2	0
d_ 3	0
d_ 4	0
d_ 5	0
d_ 6	0
d_ 7	0
d_ 8	0
d_ 9	0
d_ 10	0
d_ 11	0
d_ 12	0

d_13	0
d_14	0
d_15	0
d_16	0
d_17	0
d_18	0
d_19	0
d_20	0
d_21	0
d_22	0
d_23	0
d_24	0
d_25	0
d_26	0
d_27	0
d_28	0
d_29	0
d_30	0
d_31	0
d_32	1
d_33	0

Corte Nro 4

x_32	50
x_34	1000
rhs	16642

Valor de la funcion objetivo problema de primer estado: 113292

x_1	1
x_2	1
x_3	1
x_4	1
x_5	1

x_ 6	1
x_ 7	1
x_ 8	0
x_ 9	0
x_ 10	1
x_ 11	0
x_ 12	0
x_ 13	1
x_ 14	1
x_ 15	1
x_ 16	1
x_ 17	0
x_ 18	1
x_ 19	0
x_ 20	1
x_ 21	1
x_ 22	0
x_ 23	1
x_ 24	0
x_ 25	1
x_ 26	0
x_ 27	1
x_ 28	1
x_ 29	1
x_ 30	1
x_ 31	1
x_ 32	0
x_ 33	0
x_ 34	16.642

Valor de la funcion objetivo problema segundo estado: 16642

Solucion en fase II

Variables duales

d_ 1	0
d_ 2	0
d_ 3	0
d_ 4	0
d_ 5	0
d_ 6	0
d_ 7	0
d_ 8	0
d_ 9	0
d_10	0
d_11	0
d_12	0
d_13	0
d_14	0
d_15	0
d_16	0
d_17	0
d_18	0
d_19	0
d_20	0
d_21	0
d_22	0
d_23	0
d_24	0
d_25	0
d_26	0
d_27	0
d_28	0
d_29	0
d_30	0
d_31	0
d_32	1
d_33	0

Arbol basico problema lineal

nodo= 25	Pred= 0	Thread= 2	Orient= 1	Flow= 0	Dual= 0
nodo= 2	Pred= 25	Thread= 10	Orient= -1	Flow= 120	Dual= -1
nodo= 10	Pred= 2	Thread= 9	Orient= -1	Flow= 76	Dual= -18
nodo= 9	Pred= 10	Thread= 17	Orient= -1	Flow= 32	Dual= -24
nodo= 17	Pred= 10	Thread= 3	Orient= -1	Flow= 24	Dual= -26
nodo= 3	Pred= 25	Thread= 4	Orient= -1	Flow= 258	Dual= -6
nodo= 4	Pred= 3	Thread= 13	Orient= -1	Flow= 104	Dual= -14
nodo= 13	Pred= 4	Thread= 19	Orient= -1	Flow= 84	Dual= -19
nodo= 19	Pred= 13	Thread= 24	Orient= -1	Flow= 48	Dual= -23
nodo= 24	Pred= 19	Thread= 11	Orient= -1	Flow= 24	Dual= -31
nodo= 11	Pred= 3	Thread= 12	Orient= -1	Flow= 134	Dual= -19
nodo= 12	Pred= 11	Thread= 18	Orient= -1	Flow= 86	Dual= -25
nodo= 18	Pred= 12	Thread= 5	Orient= -1	Flow= 62	Dual= -37
nodo= 5	Pred= 25	Thread= 22	Orient= -1	Flow= 136	Dual= -8
nodo= 22	Pred= 5	Thread= 21	Orient= -1	Flow= 96	Dual= -25
nodo= 21	Pred= 22	Thread= 14	Orient= -1	Flow= 80	Dual= -31
nodo= 14	Pred= 21	Thread= 20	Orient= -1	Flow= 32	Dual= -35
nodo= 20	Pred= 21	Thread= 6	Orient= -1	Flow= 48	Dual= -36
nodo= 6	Pred= 25	Thread= 7	Orient= -1	Flow= 140	Dual= -10
nodo= 7	Pred= 6	Thread= 15	Orient= -1	Flow= 48	Dual= -16
nodo= 15	Pred= 6	Thread= 23	Orient= -1	Flow= 92	Dual= -20
nodo= 23	Pred= 15	Thread= 1	Orient= -1	Flow= 44	Dual= -25
nodo= 1	Pred= 25	Thread= 8	Orient= -1	Flow= 120	Dual= -13
nodo= 8	Pred= 1	Thread= 16	Orient= -1	Flow= 56	Dual= -23
nodo= 16	Pred= 8	Thread= 25	Orient= -1	Flow= 24	Dual= -29