



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

LICITACIONES DE ENERGÍA ELÉCTRICA

RODRIGO ANDRÉS MORENO VIEYRA

Tesis para optar al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Supervisor:
HUGH RUDNICK

Santiago de Chile, Diciembre, 2005



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
Departamento de Ingeniería Eléctrica

LICITACIONES DE ENERGÍA ELÉCTRICA

RODRIGO ANDRÉS MORENO VIEYRA

Tesis presentada a la Comisión integrada por los profesores:

HUGH RUDNICK

RICARDO PAREDES

JUAN PABLO MONTERO

CRISTIAN VIAL

Para completar las exigencias del grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

Santiago de Chile, Diciembre, 2005

A María y Marcelo por darme la vida. A Carla por enseñarme a disfrutarla.

AGRADECIMIENTOS

Primero, quisiera comenzar estas líneas agradeciendo a las personas que colaboraron directamente con esta investigación. Gracias al profesor Hugh Rudnick y al profesor Juan Pablo Montero, por todos sus consejos tanto a nivel de la investigación, como a nivel personal. A mis ex-compañeros de 303 Consulting Group, Alejandro Navarro, Felipe Imbarack y Carlos Barria, gracias por cada consulta resuelta, por las discusiones a media tarde, y en general por todo el apoyo brindado. A mis compañeros y ex-compañeros de Systep, Jorge, Francisco D., Francisco C., Javier, David, Daniel, y en especial a Sebastián Mocarquer y Rodrigo Jimenez quienes tuvieron especial amabilidad cuando busqué ayuda especializada. Un agradecimiento especial a Sebastien Rumley, por mostrarme una cara más conceptual de la ingeniería.

Quisiera agradecer también a todos mis amigos quienes vibraban, o simplemente se aburrían, con mis charlas y comentarios acerca de mercados eléctricos, me refiero a Francisco, Wolfram, Marcela, Claudia, Juan, Ronny, Rupa, Alejandro, Jorge, Miguel, y en general a todas las personas que me brindaron apoyo durante el último año.

A los miembros de mi familia, y en especial a mis padres por colaborar tácitamente en cada línea de este trabajo. A Carla, por su paciencia e incondicional apoyo en los momentos más difíciles.

Finalmente, quisiera dar gracias a Dios por darme la oportunidad de estar aquí.

INDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA.....	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
INDICE DE TABLAS	vii
INDICE DE FIGURAS.....	viii
RESUMEN.....	xii
ABSTRACT	xiii
I. INTRODUCCIÓN.....	1
II. MARCO TEÓRICO: TEORÍA DE JUEGOS Y TEORÍA DE SUBASTAS	3
II.1. Teoría de Juegos.....	3
II.1.1. Descripción General	3
II.1.2. Concepto de solución.....	7
II.1.3. Juegos de Información Incompleta.....	11
II.2. Teoría de subastas	15
II.2.1. Clasificación	16
II.2.2. Teorema de Equivalencia de la Remuneración.....	24
II.2.3. Concepto de Solución en Subastas	26
III. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.....	28
III.1. Evidencia Teórica y Empírica.....	29
III.1.1. Estudio Descriptivo de Dos Casos: El Mercado Colombiano y El Mercado Brasileiro	30
IV. MODELACIÓN DEL PROBLEMA.....	45
IV.1. Función Objetivo: Margen de Subasta	46
IV.2. Valoración Común del Contrato	52
IV.2.1. Cálculo de la Función Valoración	54
IV.3. Primer Problema Idealizado	55
IV.4. Segundo Problema Idealizado.....	60

IV.5. Tercer Problema Idealizado	62
IV.6. Implementación Computacional	67
IV.7. Primer Problema Idealizado	68
IV.7.1. Cálculo de la función $Va(x_i)$	68
IV.7.2. Cálculo de la función $\beta(x_i)$	70
IV.7.3. Cálculo del Equilibrio de Mercado	71
IV.8. Segundo Problema Idealizado	72
IV.8.1. Cálculo de la función $\beta(x_i)$	73
IV.8.2. Cálculo del Equilibrio de Mercado	73
IV.9. Mecánica de la Modelación: Licitación de Primer Precio	75
IV.9.1. Función de Valoración	75
IV.9.2. Estrategia de oferta	76
V. DESCRIPCIÓN DE RESULTADOS Y ESTUDIO DEL MODELO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE UN EJEMPLO: EL CASO CHILENO	80
V.1. Breve Descripción del Marco Regulatorio	80
V.2. El Sistema Interconectado Central	83
V.3. Comportamiento de los Agentes de Mercado y Equilibrio en una Licitación de Sobre Cerrado de Primer Precio por un Bloque Indivisible	86
V.4. Comportamiento de los Agentes de Mercado y Equilibrio en una Licitación de Sobre Cerrado de Segundo Precio por un Bloque Indivisible	103
V.5. Comparación Entre los Modelos de Primer y Segundo Precio	113
V.6. Acerca de Licitaciones por un Bloque Divisible: Análisis Tanto a Licitaciones de Demanda Individual como a Licitaciones Coordinadas de Demanda Agregada	116
V.6.1. Licitación de un Gran Bloque de Demanda Proveniente de Una Distribuidora	116
V.6.2. Coordinación de Distribuidoras	120
V.6.3. Análisis Cualitativo entre Licitación Multiproducto de Precio Uniforme y Precio Discriminatorio	121
V.6.4. Conclusión	122
V.7. Análisis Cualitativo de Relajación de Supuestos	123
V.7.1. Aversión al Riesgo	123

V.7.2. Asimetría.....	126
V.8. Advertencia acerca de tópicos sensibles	126
VI. CONCLUSIONES.....	128
VI.1.Desarrollos Futuros	132
BIBLIOGRAFIA.....	133
A N E X O S.....	137
ANEXO A: DATOS DE ENTRADA DE LOS MODELOS.....	138
ANEXO B: ESTUDIO DE LA RAZÓN HAZARD.....	143
ANEXO C: CONVERGENCIA DEL ALGORITMO NUMÉRICO	149

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla II- 1: Tipos de subasta.....	17
Tabla II- 2: Tabla resumen de ofertas y negociaciones resultantes del proceso de subasta.....	21
Tabla II- 3: Tabla resumen de ofertas y negociaciones resultantes del proceso de subasta.....	22
Tabla III- 1: Resultado de primera subasta brasilera.....	43
Tabla V- 1: Ventas de energía año 2004.....	83
Tabla V- 2: Participación de mercado de generación en el SIC.....	84
Tabla V- 3: Encarecimiento de la valoración del precio spot en función del riesgo	125
Tabla A- 1: Proyección de costos marginales y demanda para nodo Cerro Navia 220 CNE	138

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 2- 1: Ejemplo de juego sencillo	5
Figura 2- 2: Ejemplo de juego sencillo modificado	6
Figura 2- 3: Juego del gallina	10
Figura 2- 4: Juego de subasta de obra de arte dado que la disponibilidad a pagar del rival es 3 (20% de probabilidad)	12
Figura 2- 5: Juego de subasta de obra de arte dado que la disponibilidad a pagar del rival es 4 (80% de probabilidad)	13
Figura 2- 6: Equivalente de juego de subasta	14
Figura 2- 7: Subasta inglesa multiproducto	19
Figura 2- 8: Subasta holandesa multiproducto	20
Figura 2- 9: Subasta pay-as-bid multiproducto	21
Figura 2- 10: Subasta precio uniforme multi-producto	23
Figura 3- 1: Precios promedios ponderados históricos en el MEM	34
Figura 3- 2: Fases del proceso de licitación en Brasil	41
Figura 4- 1: Formas de la solución $\beta(\cdot)$ derivadas de la condición de primer orden..	58
Figura 4- 2: Solución al problema de optimización que resuelve cada individuo en una subasta multi-producto pay-as-bid	66
Figura 4- 3: Ejemplo de discretización de funciones	69

Figura 4- 4: Cálculo del precio de equilibrio mediante Monte Carlo	72
Figura 4- 5: Cálculo del precio de equilibrio mediante Monte Carlo	74
Figura 4- 6: Mejor estimación del precio spot constante equivalente para distintos valores de ξ	76
Figura 4- 7: Estrategia de oferta de un generador con un competidor	77
Figura 4- 8: Estrategia de oferta de un generador con dos competidores	78
Figura 5- 1: Cronograma de licitaciones según la Resolución Exenta N° 611	82
Figura 5- 2: Participación de mercado de generación en el SIC por empresa	85
Figura 5- 3: Participación de mercado de generación en el SIC por holding.....	86
Figura 5- 4: Troncal SIC	89
Figura 5- 5: Previsión de demanda de la distribuidora virtual	89
Figura 5- 6: Evolución de costos marginales para la barra Cerro Navia 220.....	90
Figura 5- 7: Curva de estrategia de oferentes en un mercado con 3 generadores	92
Figura 5- 8: Precio de equilibrio en una licitación de primer precio sobre cerrado ...	93
Figura 5- 9: Curvas de estrategia de oferentes en un mercado con 3 competidores con distintos precios de reserva	95
Figura 5- 10: Precio de equilibrio en una licitación de primer precio sobre cerrado con distintos precios de reserva	96
Figura 5- 11: Curvas de estrategia de oferentes en un mercado con 6 competidores con distintos precios de reserva	98
Figura 5- 12: Precio de equilibrio en una licitación de primer precio sobre cerrado con distintos precios de reserva y 6 oferentes	99

Figura 5- 13: Curvas de estrategia de oferentes en un mercado con 11 competidores con distintos precios de reserva.....	100
Figura 5- 14: Precio de equilibrio en una licitación de primer precio sobre cerrado con distintos precios de reserva y 6 oferentes	101
Figura 5- 15: Curva de estrategia de oferentes en un mercado con 3 generadores..	104
Figura 5- 16: Precio de equilibrio en una licitación de segundo precio sobre cerrado	105
Figura 5- 17: Curvas de estrategia de oferentes en un mercado con 3 competidores con distintos precios de reserva	106
Figura 5- 18: Precio de equilibrio en una licitación de primer precio sobre cerrado con distintos precios de reserva	107
Figura 5- 19: Curvas de estrategia de oferentes en un mercado con 6 competidores con distintos precios de reserva	109
Figura 5- 20: Precio de equilibrio en una licitación de primer precio sobre cerrado con distintos precios de reserva y 6 oferentes	110
Figura 5- 21: Curvas de estrategia de oferentes en un mercado con 11 competidores con distintos precios de reserva.....	111
Figura 5- 22: Precio de equilibrio en una licitación de primer precio sobre cerrado con distintos precios de reserva y 6 oferentes	112
Figura 5- 23: Equilibrio de licitaciones de primer y segundo precio con tres oferentes.....	114
Figura 5- 24: Equilibrio de licitaciones de primer y segundo precio con tres oferentes, y un precio de reserva restrictivo	115
Figura 5- 25: Estimación heurística equilibrio de mercado subasta pay-as-bid.....	118

Figura A- 1: Proyección del costo marginal barra Cerro Navia 220.....	141
Figura A- 2: Proyección del costo marginal y cotas para la barra Cerro Navia 220	142
Figura B- 1: Densidad de probabilidad de ofertas por sub-bloques de licitación multiproducto.....	145
Figura B- 2: Función de probabilidad acumulada de ofertas por sub-bloques de licitación multiproducto.....	146
Figura B- 3: Funciones inversas de Hazard	146
Figura B- 4: Funciones de densidad de probabilidad normal de igual varianza	147
Figura B- 5: Funciones inversas de Hazard para funciones de probabilidad normal de varianza constante.....	148
Figura C- 1: Experimento numérico N° 1	150
Figura C- 2: Experimento numérico N° 2	151
Figura C- 3: Experimento numérico N° 3	152
Figura C- 4: Experimento numérico N° 4	153

RESUMEN

El objetivo central de esta tesis es analizar cómo interactuarán los agentes del mercado eléctrico chileno tras el cambio realizado al DFL N° 1 mediante la Ley N° 20.018, aprobado en mayo del 2005. El nuevo marco regulatorio (ley corta II) establece, entre sus principales reformas, que distribuidores y generadores negocien sus contratos de compra-venta de energía mediante procesos de licitación.

El análisis se desarrolla principalmente en base a tres modelos matemáticos, los cuales se derivan de los principios de teoría de juegos y teoría de subastas¹. Específicamente, se aplican los conceptos de equilibrio de Nash y equilibrio bayesiano.

Estos tres modelos desarrollados, permiten el análisis directo de situaciones en las cuales los distribuidores ofertan contratos mediante tres tipos de licitaciones: licitación uniproducción de sobre cerrado de primer precio, licitación uniproducción de sobre cerrado de segundo precio y licitación multiproducción de sobre cerrado pay-as-bid. Si bien, para algunas condiciones es posible utilizar procedimientos algebraicos y obtener expresiones cerradas, para otras es necesario aplicar técnicas de cálculo numérico, tales como la diferencia finita y la heurística de Monte Carlo.

Finalmente, se concluye que bajo ideales² e idénticas condiciones de mercado para cada uno de los mecanismos de licitación, éstos despejan situaciones de equilibrio muy similares entre sí. Sin embargo, se advierte que bajo un esquema real de mercado esta equivalencia puede variar rotundamente, dado que los mecanismos presentan distintas barreras de entrada a la participación, afectando las condiciones de mercado para cada caso.

Los modelos desarrollados se aplican al Sistema Interconectado Central (SIC).

¹ La presente tesis se refiere indistintamente al término *licitación* o *subasta*.

² Se entiende por *condiciones ideales* de mercado cuando todos los generadores tienen capacidad infinita para ofertar en una licitación.

ABSTRACT

The aim of this thesis is to analyze how generators and distributors will act in the new Chilean energy pricing scheme which was introduced on May 2005. As a result of the reforms, distributors will have to bid their supplying contracts in an auction scheme. These auctions are not discriminatory, and existing generators as well as new agents or investors can participate.

This research analyzes this new market conditions by means of three mathematical models which employ game theory and auction theory concepts. Thus, the main concepts used are Nash and bayesian equilibrium.

These three mathematical models allow to study the situations where distributors bid their supplying contracts by means of the following mechanisms: a single object first-price auction, a single object second-price auction and a multiple objects pay-as-bid auction. In order to solve the first order condition and to get the equilibrium point of the market for each problem, it is necessary to apply algebraic as well as numeric manipulation. Finite difference and Monte Carlo heuristic are the numeric used methods.

Finally, one of the most important conclusion of this work is that market equilibriums are very similar between diferents auction mechanisms which have ideal and equal conditions. But, under a real market scheme, prices of market equilibriums could result very different, because different auctions mechanisms affect the participation level of the agents.

The developed models are used to study the main Chilean electric market: the Central Interconnected System (Sistema Interconectado Central).

I. INTRODUCCIÓN

En el último tiempo, la tendencia en los mercados eléctricos apunta hacia modelos cada vez más liberalizados, en donde el precio de las transacciones de electricidad sea despejado por un algoritmo simple de mercado, en lugar de los complejos métodos centralizados basados en la solución de problemas de programación no lineal. Si bien, esta última metodología permitió a Chile ser pionero en promover la competencia (principalmente en el sector generación) al pasar desde un esquema de mercado completamente de propiedad estatal hacia uno más liberalizado que permite la incorporación de agentes privados, en la actualidad dicha metodología ha dejado de cumplir con su propósito. Hoy por hoy, la mayoría de los agentes del mercado eléctrico chileno concuerdan en que los precios despejados por dicha metodología no reflejan los costos reales de generación, poniendo en peligro la evolución natural del parque generador ajustado a la demanda.

Las recientes contingencias ocurridas durante los años 2004 y 2005 respecto al racionamiento del abastecimiento de gas natural importado desde Argentina a Chile, reafirmaron los problemas que presentaba la metodología de cálculo de precio de nudo. Dicha metodología no permitió transferir correctamente el alza de costos operacionales al consumidor final, lo que provocó un drástico desincentivo a la inversión. Es así como el regulador estatal comenzó a estudiar diversas medidas para solucionar el problema, considerando incluso, la posibilidad de liberalizar dicho precio de nudo. Finalmente, en mayo del 2005 se formula una nueva metodología de cálculo de precio de nudo mediante la aprobación de la Ley N° 20.018, la cual permite que las concesionarias de servicio público de distribución liciten sus requerimientos de energía, contratando abastecimiento eléctrico al precio despejado en la licitación.

La aprobación de la Ley N° 20.018 en el mercado chileno es una repuesta extendida ante las nuevas condiciones de mercado presentes en toda la región, sin ir más lejos, Chile no es el primer país en adoptar este nuevo modelo, los ejemplos más emblemáticos han

sido los cambios realizados en los mercados eléctricos de Colombia, Brasil y Perú³, países que han realizado profundas transformaciones en sus legislaciones con el propósito de proporcionar las condiciones adecuadas para un seguro abastecimiento de la demanda eléctrica. Estos países han instaurado esquemas de licitaciones de contratos de abastecimiento entre distribuidoras y generadoras, con tal de incorporar una verdadera señal de mercado en los precio de compra-venta de electricidad.

El presente trabajo pretende contribuir con desarrollos metodológicos, modelos y propuestas para la aplicación de estas licitaciones. Por tanto, se desarrollan diversos modelos que permiten describir el comportamiento de los agentes de mercado en una licitación de contratos de energía bajo las reglas declaradas en el reciente cambio de Ley. Así, la hipótesis sobre la cual se estructura el siguiente trabajo es: los distintos mecanismos de licitación aplicables al mercado eléctrico chileno convergen a distintos niveles de precios. Esta hipótesis ilustra lo importante de realizar un análisis de los distintos tipos de subasta, ya que éstos provocarán diferentes niveles de tarifas a nivel de cliente final.

³ En Perú los cambios se encuentran a nivel de Proyecto de Ley (Libro Blanco)

II. MARCO TEÓRICO: TEORÍA DE JUEGOS Y TEORÍA DE SUBASTAS

Una subasta se suele modelar utilizando los conceptos instaurados en la teoría de juegos. En el presente capítulo se discuten los principales temas referentes a la teoría de juegos, así como los principales temas referentes a la teoría de subasta.

II.1. Teoría de Juegos

II.1.1. Descripción General

Un juego es una determinada situación en que los individuos (jugadores) hacen elecciones en un contexto de interacción y en un marco definido previamente. Por lo tanto, la teoría de juegos es el área de la matemática que examina el comportamiento de individuos que interactúan dentro de una estructura formalizada de incentivos.

Se pueden diferenciar distintos tipos de juegos dependiendo del contexto en donde interactúan los individuos. Dentro de los juegos más conocidos se encuentran:

- Juegos de suma cero: Son aquellos en que la ganancia del ganador es la pérdida del jugador rival.
- Juegos cooperativos: Son aquellos en que los participantes pueden firmar contratos para actuar en forma coludida.
- Juegos con información completa: Son aquellos en donde los participantes conocen todas las características del juego, por ejemplo, tienen información acerca de la recompensa que podrían obtener el resto de los jugadores.
- Juegos secuenciales: Son aquellos en donde los distintos agentes van realizando su jugada una vez realizada la acción del jugador rival.

Obviamente, cada uno de estos tipos de juego tiene su antónimo, es decir, existen los juegos de no-suma cero, juegos no-cooperativos, juegos con información incompleta y juegos simultáneos.

Un juego (en forma extensiva) está básicamente compuesto por⁴:

- Un conjunto de jugadores, los cuales son los individuos que formarán parte del juego. Cada uno de éstos se considera racional.
- Un árbol, el cual describe gráficamente el juego. Éste está compuesto por nodos, cada uno asignado a un solo jugador, y arcos, los cuales simbolizan las acciones que dispone cada jugador en cada uno de sus nodos.
- Información, con la cual cuenta el jugador en cada instante que tiene que decidir. La información se describe mediante *conjuntos de información*, que son conjuntos de nodos que el jugador puede distinguir entre sí.
- Estrategias, que consiste básicamente en un manual de instrucciones que le dice al jugador qué decidir ante una determinada situación.
- Utilidad o Pagos, los cuales representan la ganancia o pérdida de los distintos agentes una vez acabado el juego.

Con el fin de ilustrar los conceptos introducidos anteriormente, a continuación se presenta un pequeño ejemplo.

Ejemplo: Se considera un juego de dos participantes. La mecánica del juego consiste en que uno de los jugadores, el jugador uno, le dice a su rival, el jugador dos, que piense en un número del 1 al 2 y que anote su elección en un papel. Luego, el jugador uno debe intentar adivinar el número que el jugador dos pensó y luego anotó. Si el jugador uno adivina el número, éste percibe una ganancia de \$10, mientras el jugador dos pierde \$10, si el jugador uno no adivina el número, éste pierde \$10 y el jugador dos gana \$10. Si se considera el hecho que el jugador dos nunca ocultó el papel en el cual escribió el número que pensó, mostrándole su opción a su rival, entonces éste último tiene 100% de posibilidades de ganar, ya que tuvo la eventualidad de mirar la opción de su rival en el momento que éste la anotó en el papel. El árbol que describe el juego mencionado anteriormente se muestra en la Figura 2- 1:

⁴ Fisher, R. (2000) *Apuntes del Curso Organización Industrial*

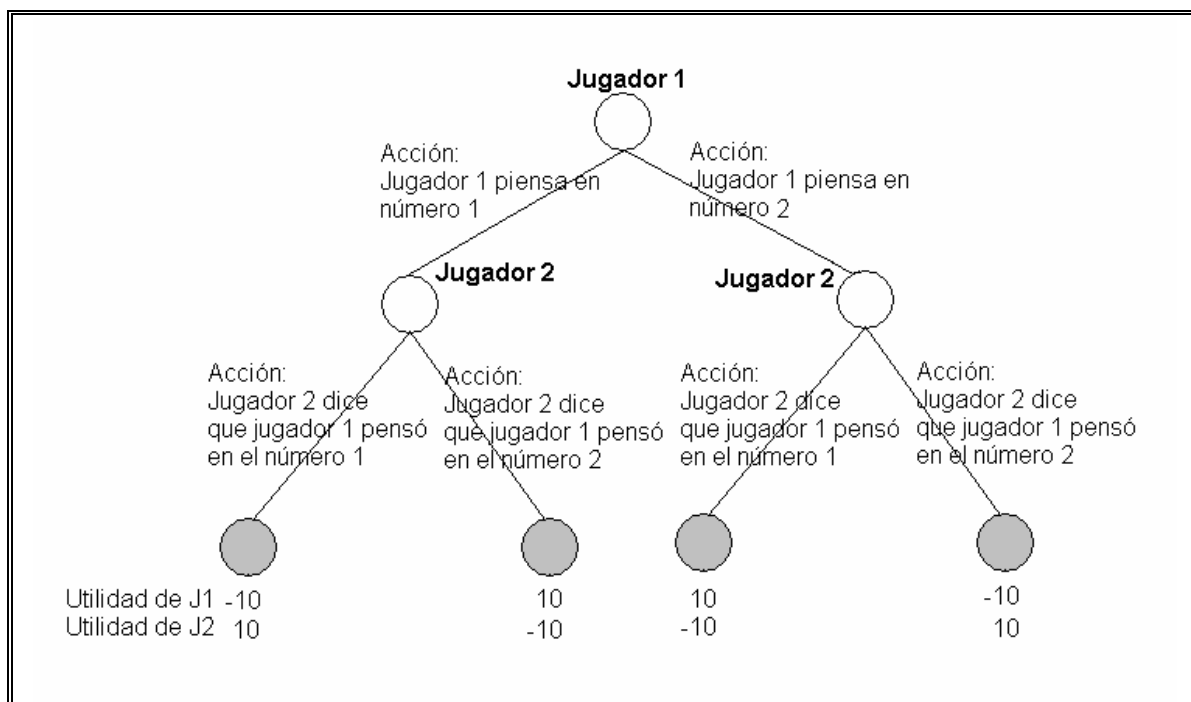


Figura 2- 1: Ejemplo de juego sencillo

La Figura 2- 1 es una representación gráfica del juego, en ésta se observa que el jugador uno posee un solo nodo, el cual conforma su único conjunto de información. En él puede optar por una de sus dos acciones posibles, pensar en el número 1 o en el número 2, las cuales a su vez, definen sus dos estrategias viables. El jugador dos posee dos nodos que puede distinguir entre sí, ya que sabe lo que el jugador uno ha pensado (pues éste lee el papel antes de pronunciarse), así éstos conforman dos conjuntos de información. Las dos acciones que puede realizar el jugador dos definen un conjunto de 4 estrategias, éstas son; decir 1 si el jugador uno ha pensado en 1, decir 1 si el jugador uno ha pensado en 2, decir 2 si el jugador uno ha pensado en 1 y decir 2 si el jugador uno ha pensado en 2.

Si el juego anteriormente ejemplificado se varía levemente, en cuanto a que el jugador dos no puede leer el papel en el cual el jugador uno escribió el número que pensó, entonces el árbol que muestra los componentes del juego sería:

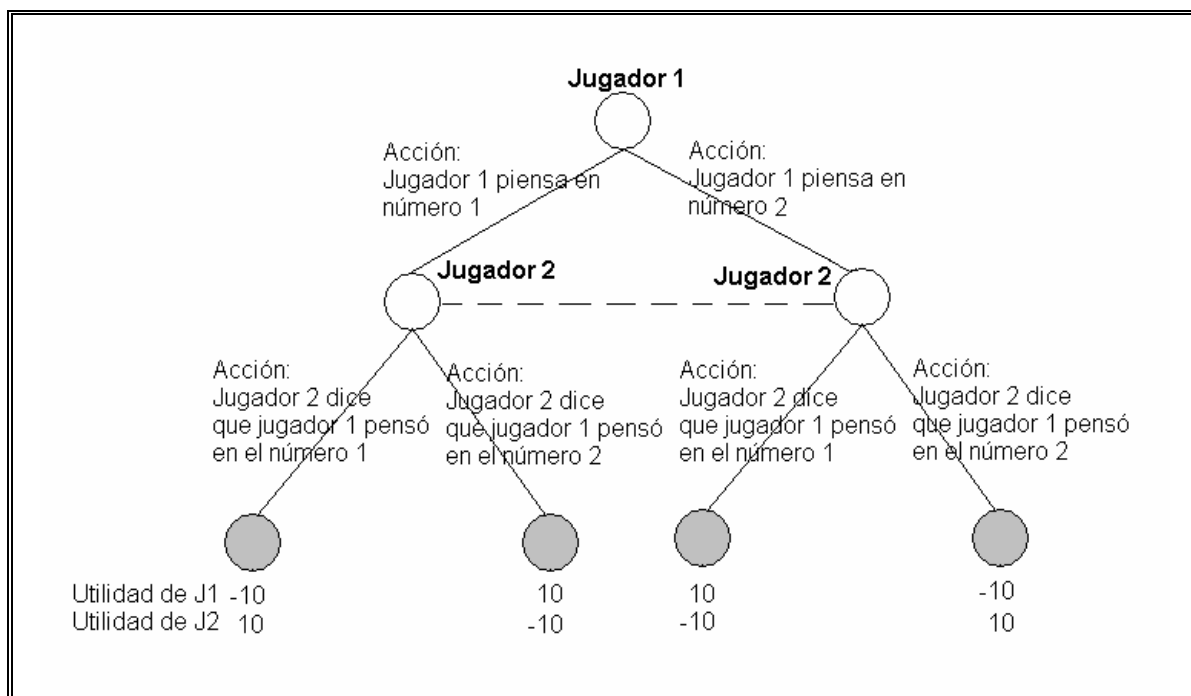


Figura 2- 2: Ejemplo de juego sencillo modificado

El árbol descrito en la Figura 2- 2 es similar al de la Figura 2- 1 con la diferencia que en el ejemplo reciente los dos nodos del jugador dos están unidos por una línea punteada, la cual representa el hecho que dicho jugador no puede distinguir entre su nodo izquierdo y su nodo derecho, producto que no ha podido ver la jugada de su rival. Por lo tanto, el número de estrategias de éste se reduce a dos. Los dos nodos del jugador dos, los cuales éste no puede diferenciar entre sí, se dice que forman un solo conjunto de información.

Cuando un jugador posee conjuntos de información que están formados por más de un nodo, se dice que el juego es de información imperfecta. Así, el juego descrito por el árbol de la Figura 2- 1 se dice de información perfecta, mientras que el juego descrito por la Figura 2- 2 se dice de información imperfecta.

II.1.2. Concepto de solución

En el punto anterior se describió en términos generales los elementos básicos de un juego, ahora es pertinente introducir que se entiende por la solución de éste. En palabras sencillas se puede describir la solución de un juego como: la forma en que los jugadores racionales jugarían dicho juego.

Existen muchos mecanismos que permiten encontrar la solución a un juego. Entre los más utilizados y con las principales aplicaciones se encuentran:

- Equilibrio en estrategias dominantes
- Equilibrio por eliminación iterada de estrategias dominadas
- Equilibrio de Nash

Para comprender cada uno de éstos es necesario introducir cierto vocabulario técnico, el cual se define a continuación:

- Una estrategia θ de un jugador i , es *mejor respuesta* ante otra estrategia Ω de un jugador j , si la utilidad del jugador i que le reporta la estrategia θ es la más alta que pudiese obtener, dado que el jugador j realizó la estrategia Ω .

En un lenguaje más formal, una estrategia E_i^* del jugador i es mejor respuesta a las estrategias de los demás jugadores E_{-i} si:

$$U_i(E_i^*, E_{-i}) \geq U_i(E_i, E_{-i}) \quad \forall E_i$$

Donde:

U_i := Utilidad del jugador i

E_i := Estrategia del jugador i

E_{-i} := Estrategia del resto de los jugadores (todos los jugadores excepto i)

- Una estrategia E_i^* de un jugador i , es una *estrategia dominante*, si ésta es mejor respuesta a todas las estrategias de los demás jugadores, es decir:

$$U_i(E_i^*, E_{-i}) \geq U_i(E_i, E_{-i}) \quad \forall E_i, E_{-i}$$

- o Una estrategia E_i es *débilmente dominada* por E_i' si la utilidad U_i que reporta la estrategia E_i' al jugador i es mayor que la utilidad que pudiese obtener éste mediante la estrategia E_i ante cualquier estrategia del resto de los jugadores, es decir:

$$U_i(E_i', E_{-i}) \geq U_i(E_i, E_{-i}) \quad \forall E_{-i}$$

Con los conceptos de mejor respuesta, estrategia dominante y estrategia dominada es fácil describir los 3 tipos de equilibrios mencionados al inicio del punto II.1.2. Luego, se puede decir que un equilibrio en *estrategias dominantes* es aquel en que cada uno de los jugadores realiza la mejor jugada, la cual es única, ante cualquier respuesta de sus rivales, un equilibrio por *eliminación iterada de estrategias dominadas*, consiste en realizar iteraciones sucesivas en las cuales en cada una de éstas se van eliminando las estrategias dominadas para cada uno de los distintos jugadores, y un equilibrio de Nash es uno en el cual cada uno de los jugadores realiza como estrategia la mejor respuesta ante las estrategias del resto de los jugadores.

Como se puede observar fácilmente, un equilibrio en estrategias dominantes es muy poderoso, ya que es único y ningún jugador tiene mejores alternativas desde un punto de vista individual. Lamentablemente, un equilibrio de estrategias dominantes es difícil de encontrar en la realidad, por lo tanto se torna más relevante el concepto de equilibrio de Nash, ya que éste está ampliamente avalado en la literatura técnica y su existencia está asegurada en todos los juegos no-cooperativos⁵. Dada la relevancia de este tipo de equilibrio, éste será sobre el cual se asentará la presente investigación.

⁵ Nash, J. (1950) *Equilibrium Points in N-Person Games*

II.1.2.1. Equilibrio de Nash

Como se mencionó anteriormente, en un equilibrio de Nash la estrategia de cada jugador es una mejor respuesta ante las estrategias de los otros jugadores. En un lenguaje más formal, un equilibrio de Nash es un set de estrategias $E^* = \{E_1^*, \dots, E_n^*\}$ tal que:

$$U_i(E_i^*, E_{-i}^*) \geq U_i(E_i, E_{-i}^*) \quad \forall i$$

Esta definición del equilibrio de Nash sugiere un algoritmo obvio para encontrar el equilibrio, partir con cualquier set de estrategias como solución inicial y realizar iteraciones en las cuales cada jugador compute su mejor respuesta ante la estrategia de los demás de manera de corregir su respuesta anterior, cuando el algoritmo converja al mismo set de estrategias, entonces éste será un equilibrio de Nash.⁶

Para comprender a cabalidad el concepto de solución mediante la utilización del equilibrio de Nash, se ilustra el siguiente ejemplo:

Juego del gallina: En este juego, dos personas conducen sus respectivos automóviles en direcciones opuestas por un camino abandonado de manera que si ninguno de los dos se desvía éstos colisionarán. Así, el conductor que se desvía es el gallina ($U=0$), mientras el otro obtiene el prestigio de ser el valiente ($U=10$), por otro lado si los dos se desvían, ambos serán los gallinas, pero conservarán su integridad física ($U=1$), mientras que si los dos deciden ser los valientes ocurrirá una catástrofe ($U=-100$). El árbol que describe el juego es:

⁶ Reeves, D. y Wellman, M. (2004) *Computing Best-Response Strategies in Infinite Games of Incomplete Information*

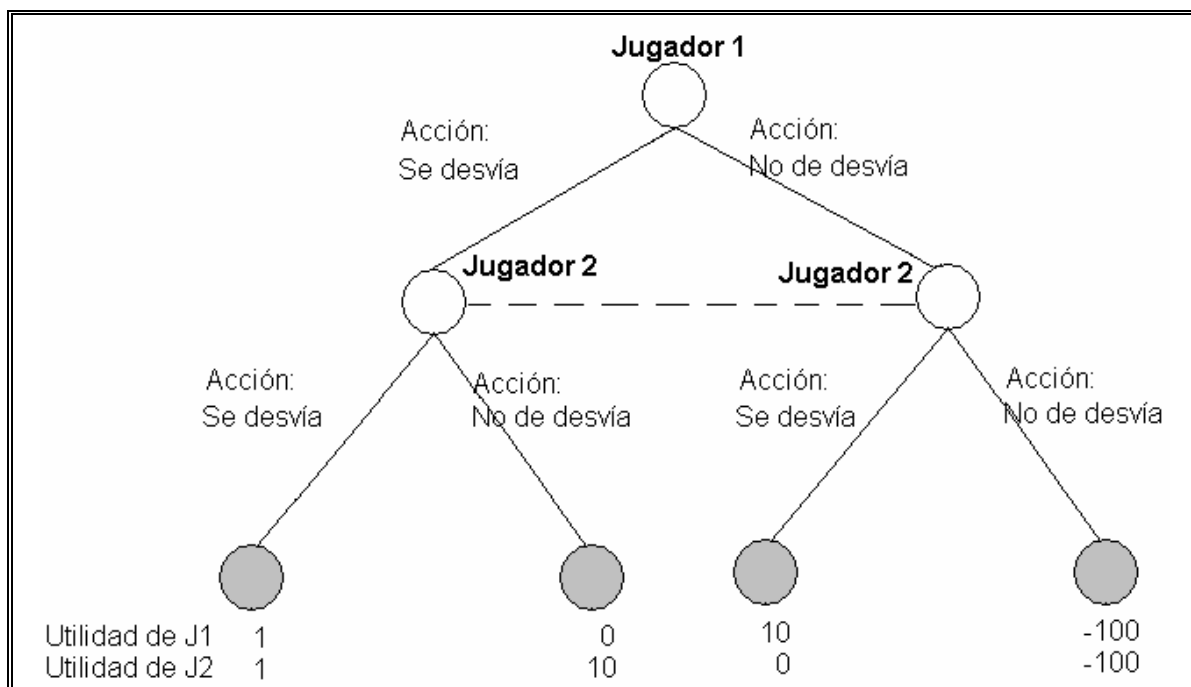


Figura 2- 3: Juego del gallina

No es difícil deducir, con el apoyo de la Figura 2- 3, que existen dos equilibrios de Nash para el juego recientemente propuesto:

En el primer equilibrio de Nash, el jugador uno se desvía y el jugador dos es el valiente. Como se puede observar, la respuesta de cada uno de ellos es la mejor que pueden realizar dada la jugada de su rival.

En el segundo equilibrio de Nash, el jugador dos se desvía y el jugador uno es el valiente. Como se puede observar, la respuesta de cada uno de ellos es la mejor que pueden realizar dada la jugada de su rival.

Es decir, en cada uno de los equilibrios de Nash, uno de los jugadores se desvía.

El hecho que existan estos dos equilibrios muestra claramente que no existe un equilibrio en estrategias dominantes, ya que ninguno de los jugadores tiene una estrategia que sea mejor opción ante cualquier jugada de su rival.

Finalmente, y sólo a nivel de advertencia, se aclara que todos los equilibrios mencionados anteriormente en esta sección se denominan *equilibrios en estrategias puras*. Existe otra dimensión de equilibrios llamados de *estrategias mixtas*, pero que no son relevantes para el desarrollo del trabajo de investigación presentado en esta tesis.

II.1.3. Juegos de Información Incompleta

En el punto anterior se indicó que los juegos se pueden clasificar respecto a su información como juegos de información imperfecta y como juegos de información perfecta, de hecho se citaron dos ejemplos al respecto. Profundizando acerca del tema se puede agregar que los juegos de información imperfecta se presentan cuando uno de los participantes del juego no puede distinguir sobre cual nodo se encuentra, mientras que en los juegos de información perfecta todos los jugadores pueden distinguir su ubicación en el árbol del juego. Una segunda distinción se realiza en la teoría de juegos en cuanto a la información, pues fuera de los juegos de información imperfecta se clasifican los juegos de información incompleta. Un juego se dice de *información incompleta* cuando alguno de los jugadores no conoce la utilidad o pago del resto de los jugadores. En cierta medida la gran mayoría de los juegos son de información incompleta, y el caso de información completa es simplemente un supuesto razonable para modelar algunos problemas. Para comprender el concepto de la información incompleta se ilustra el siguiente ejemplo:

Subasta de obra de arte: Dos interesados en adquirir una obra de arte participan en un remate en el cual se subastará dicha obra. El mecanismo de adjudicación consiste en realizar ofertas en un sobre cerrado, las cuales se abren todas en un mismo acto público. Gana la subasta el jugador que realizó la oferta más alta y el precio de negociación de la obra de arte debe ser el que dicho jugador ofertó⁷. En este juego, cada uno de los participantes conoce bien su propia disposición a pagar por dicha obra, pero desconoce cuanto será la disposición a pagar de su rival. Esto se traduce en que cada uno de los participantes desconoce la función de utilidad o pago de su contrincante. En este marco,

cada jugador debe realizar una oferta en la subasta, que sea la más conveniente para sí mismo. Así, a pesar de que cada jugador carece de dicha información acerca de su rival, éstos pueden asumir ésta como una variable aleatoria con alguna función de probabilidad conocida. Para el ejemplo introducido, se puede asumir que cada jugador piensa que la disposición a pagar de su rival es 3 con 20% de probabilidad y 4 con 80% de probabilidad. Sea x_i la propia disposición a pagar de cada participante, la cual es bien conocida por sí mismo, pero no por su rival. Entonces el árbol que describe el juego de cada jugador sería:

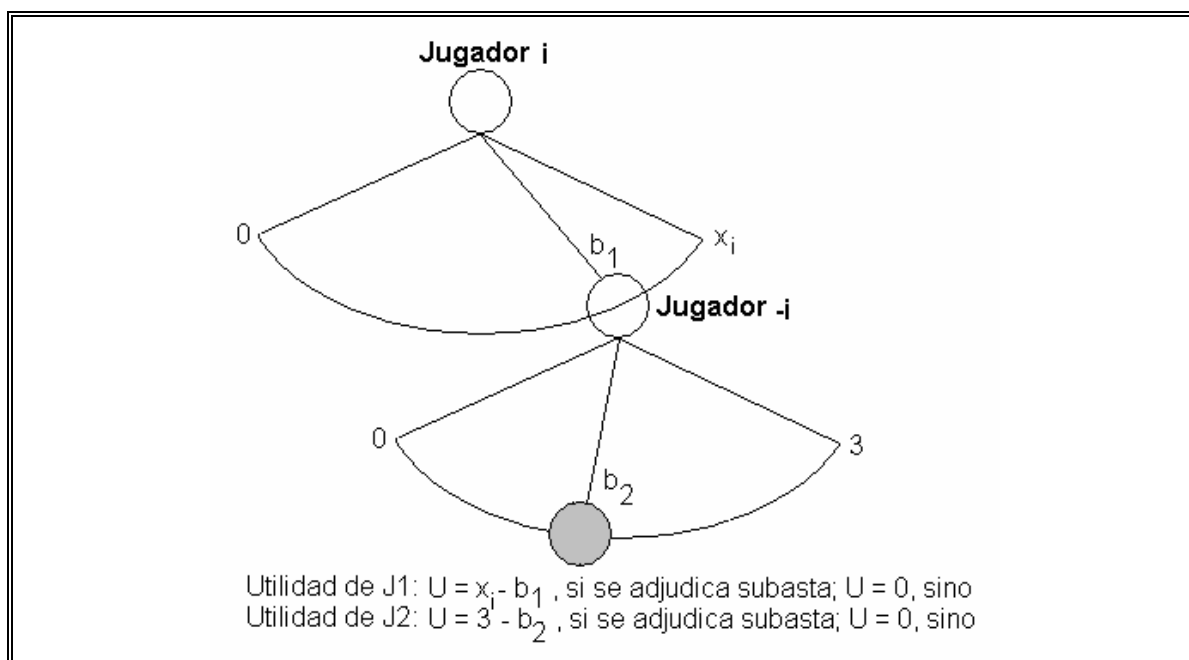


Figura 2- 4: Juego de subasta de obra de arte dado que la disponibilidad a pagar del rival es 3 (20% de probabilidad)

⁷ Este mecanismo de subasta se conoce bajo el nombre de *Pay-as-Bid*.

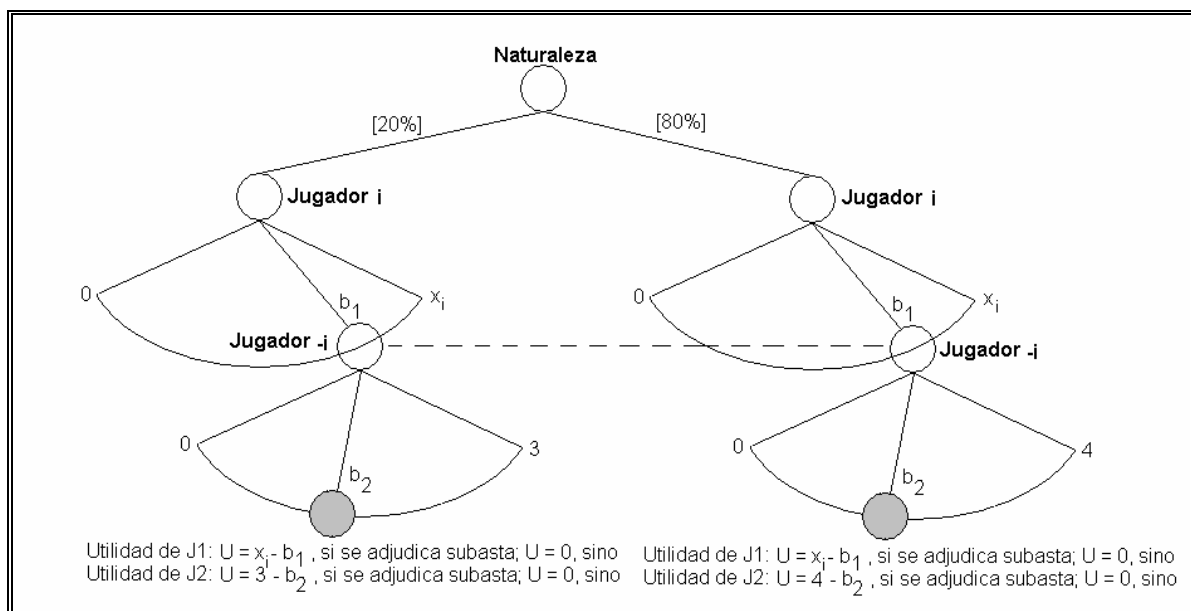


Figura 2- 6: Equivalente de juego de subasta

Existen diversas técnicas para obtener el equilibrio del juego equivalente de Harsanyi, a continuación se ilustra una de las más utilizadas.

II.1.3.1. Equilibrio Bayesiano

En la resolución de juegos de información incompleta existe un concepto de equilibrio denominado *equilibrio bayesiano*, el cual se puede definir sencillamente como el equilibrio tal que se obtiene cuando cada jugador maximiza su utilidad esperada condicional a su tipo¹⁰. En un lenguaje más formal, un equilibrio bayesiano en un juego de información incompleta, en el cual existe un conjunto finito de tipos θ_i para cada jugador i , con distribución de probabilidad p , se define como un perfil de estrategias (puras) $S_i(\cdot)$, para cada jugador i , el cual cumple con:

$$S_i(\theta_i) = \text{Arg max}_{S_i'} \sum_{\theta_{-i}} U_i(S_i', S_{-i}(\theta_{-i}), (\theta_i, \theta_{-i})) \times p(\theta_{-i} | \theta_i)$$

El equilibrio bayesiano también se conoce bajo el nombre de equilibrio Bayes-Nash, dado que la existencia de éste es una consecuencia directa del equilibrio de Nash. El equilibrio bayesiano es precisamente el equilibrio de Nash de la representación del juego de información incompleta como un juego de información imperfecta, tal como lo propuso Harsanyi⁸.

II.2. Teoría de subastas

Una subasta o licitación es básicamente un proceso en donde un número de participantes buscan adjudicarse un(os) bien(es) en función de ofertas realizadas ante un martillero¹¹.

En la actualidad existe un sin número de casos que se pueden citar como ejemplos en los cuales se utilizan los mecanismos de subasta: remates de obras de arte, subasta de propiedades, licitaciones de contratos, subastas en Internet (Amazon.com, Ebay.com, Deremate.com), subasta de bandas espectrales en telecomunicaciones, venta de paquetes de acciones en apertura de empresas a la bolsa de comercio de Santiago, adjudicaciones de derechos de explotación mineral, subastas en los proceso de privatizaciones, etc.

El mecanismo de subasta nace con el propósito de maximizar el beneficio obtenido por la venta de uno o varios productos. A pesar que el auge en el estudio económico de subastas es reciente, éstas se han utilizado en el proceso de compra-venta desde varios siglos atrás. De hecho, el termino subasta se deriva del acto de clavar la lanza en el suelo que realizaban los soldados romanos para marcar el lugar en el que se vendían los productos obtenidos de los saqueos tras la batalla, en latín sub-hasta.

Existe una importante literatura en la cual se comparan diferentes diseños de subasta desde diferentes puntos de vistas. Éstos van desde la facilidad para ejercitar poder de mercado, la eficiencia de producción, hasta los desembolsos para el demandante. Un diseño puede ser superior en una dimensión mientras que otro diseño lo sea en otra.

¹¹ Se entiende por martillero o anfitrión de subasta a la persona que recibe las ofertas de los participantes.

Desde el punto de vista de la modelación, las subastas se enmarcan dentro de la teoría de juegos, específicamente se clasifican como juegos de información incompleta, ya que cada jugador debe especular acerca de la información particular de cada uno del resto de los jugadores.

II.2.1. Clasificación

Las subastas se pueden clasificar de múltiples maneras, sin embargo, las distinciones básicas están en función de las siguientes características:

- Número de bienes a subastar: single object auction o multiple object auction (subasta uniproducto o subasta multiproducto)
- Tipo de valoración del bien: valoración privada o valoración común
- Reglas del proceso: subasta ascendente, descendente, primer precio, etc.

Así, una subasta puede ser del tipo *primer precio multiple object auction de valor privado*, o bien del tipo *segundo precio single object auction de valor privado*. A continuación, se describe con mayor detalle cada una de las clasificaciones mencionadas anteriormente.

II.2.1.1. Acerca del Número de Bienes a Subastar y las Reglas del Proceso

Una subasta puede liquidar uno o varios bienes bajo distintos mecanismos o reglas. Los mecanismos se pueden resumir básicamente en dos: subasta holandesa y subasta inglesa, de las cuales se pueden derivar otros formatos dependiendo si se trata de una subasta *abierta* o de *sobre cerrado*, o bien si se quieren liquidar uno o varios bienes a la vez. En la Tabla II- 1 se resume los formatos básicos de subasta, y luego se presenta una descripción de cada uno¹².

¹² Krishna, V. (2002) *Auction Theory*

Tabla II- 1: Tipos de subasta

<i>Single Object Auction</i>		<i>Multiple Object Auction</i>	
Abierto	Sobre Cerrado	Abierto	Sobre Cerrado
Subasta Inglesa	Segundo Precio	Subasta Inglesa	Precio Uniforme
Subasta Holandesa	Primer Precio	Subasta Holandesa	Pay-As-Bid

Primero, se presenta una descripción de las subastas de objeto único.

- Subasta Inglesa Single Object: Corresponde a un remate común. Hay un martillero quien sube el precio iterativamente desde una postura mínima. Gana el último en aceptar un precio. Se advierte que la definición anterior está referida a la oferta¹³; en el caso de referirla a la demanda, el martillero baja el precio iterativamente desde una postura máxima¹⁴.
- Subasta Holandesa Single Object: El martillero parte desde un precio muy alto y lo va disminuyendo poco a poco hasta que uno de los participantes decide aceptar el precio. Se advierte que la definición anterior está referida a la oferta; en el caso de referirla a la demanda, el martillero comienza la subasta desde un precio muy bajo y lo va aumentando paulatinamente hasta que uno de los participantes decide aceptar dicho precio.
- Subasta Primer Precio Single Object: Cada uno de los compradores puede realizar solamente una oferta, que realiza al mismo tiempo que todo el resto y sin saber como han ofertado los demás. Típicamente, la oferta se realiza en un sobre cerrado el cual se deposita en una urna. El bien se adjudica a la oferta más cara y el precio de venta es el de su oferta. Se advierte que la definición anterior está

¹³ Se entiende por *referido a la oferta* al proceso cuyo martillero o anfitrión de subasta está recibiendo ofertas de compra por el activo subastado. Por otro lado, se entiende por *referido a la demanda* al proceso cuyo martillero está recibiendo ofertas de venta por el activo subastado.

¹⁴ La subasta inglesa también recibe por nombre *subasta ascendente*, debido al proceso iterativo en la cual en cada etapa los competidores van subiendo el precio respecto de la etapa anterior. En esta tesis no se ha querido resaltar dicho nombre, ya que se analizarán subastas (licitaciones) referidas a la demanda, como por ejemplo, una subasta por un contrato de abastecimiento eléctrico, en donde el distribuidor “remata” el contrato al mejor postor. En este caso, el ganador o adjudicatario de la subasta es aquel que realiza la oferta más baja, por cierto, el proceso iterativo en este caso sería descendente en el precio.

referida a la oferta; en el caso de referirla a la demanda, el activo se adjudica a la oferta más barata y el precio de negociación es el de su oferta.

- Subasta de Segundo Precio Single Object: Cada uno de los compradores puede realizar solamente una oferta, que realiza al mismo tiempo que todo el resto y sin saber como han ofertado los demás. Típicamente, la oferta se realiza en un sobre cerrado el cual se deposita en una urna. El bien se adjudica a la oferta más cara y el precio de venta es el correspondiente a la segunda oferta más cara. Se advierte que la definición anterior está referida a la oferta; en el caso de referirla a la demanda, el activo se adjudica a la oferta más barata y el precio de negociación es el correspondiente a la segunda oferta más barata.

A continuación, se presenta una descripción de las subastas de múltiples objetos. Con el propósito de no extender demasiado dichas descripciones, éstas se presentan sólo desde el punto de vista de la demanda. Además, en éstas se presentan figuras explicativas de los procesos, ya que todos éstos son más complejos de comprender que los 4 tipos presentados anteriormente.

- Subasta Inglesa Multiple Object: En este tipo de subasta se desean liquidar múltiples activos, por ejemplo, un número de K activos homogéneos¹⁵. En este tipo de subasta el martillero comienza un proceso iterativo en el cual llama a ofertar a un precio muy alto, como todos los competidores desean vender a dicho precio, se produce una sobre-oferta. Así, el martillero comienza a disminuir el precio paulatinamente hasta que la oferta iguale a la demanda. Todos los bienes son negociados al mismo precio de equilibrio. En la Figura 2- 7 se puede observar gráficamente este proceso.

¹⁵ También existen subasta de múltiples bienes heterogéneos, pero no son materia de esta tesis. Las subastas por contratos de abastecimiento eléctrico se pueden considerar como una subasta o licitación multi-producto, en el cual cada MW se considera como una unidad.

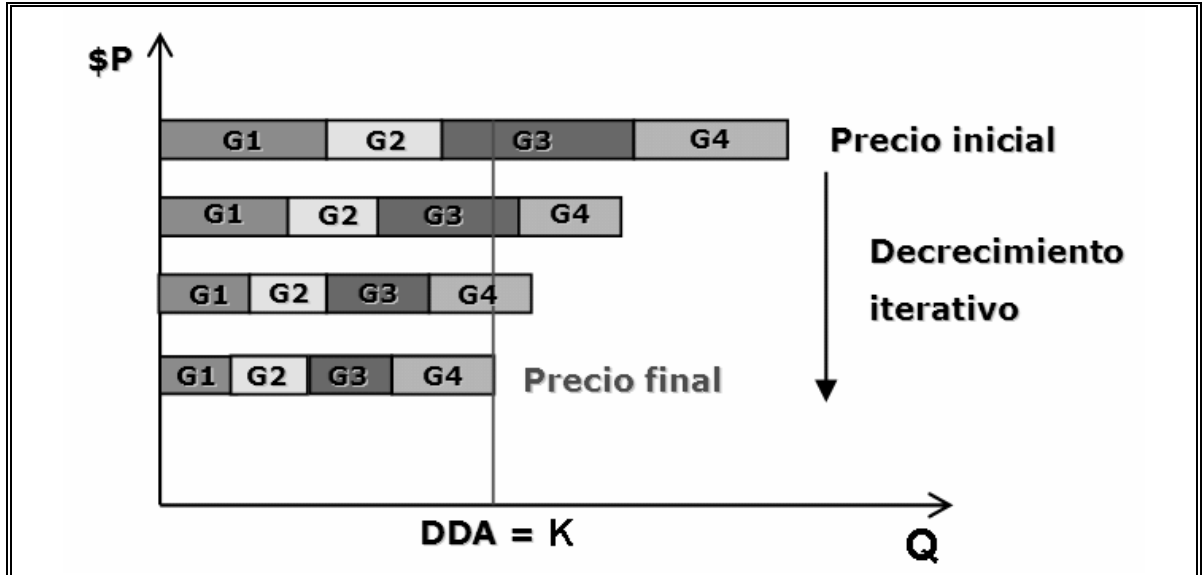


Figura 2- 7: Subasta inglesa multiproducto

Cada bloque horizontal en la Figura 2- 7 representa la cantidad ofertada por cada vendedor (G1 a G4) en cada una de las iteraciones.

- o Subasta Holandesa Multiple Object: Al igual que en la subasta inglesa multiple object, se desean liquidar K activos iguales. En este tipo de subasta el martillero comienza un proceso iterativo el cual se inicia recibiendo ofertas de venta a un precio muy bajo, en cada iteración se va incrementando este precio hasta que los primeros vendedores están dispuestos a negociar a dicho precio, los bienes ofertados son liquidados a estos oferentes en el precio señalado y continúa el proceso con el resto de los activos, hasta así completar la compra de K activos. En la Figura 2- 8 se puede observar gráficamente este proceso.

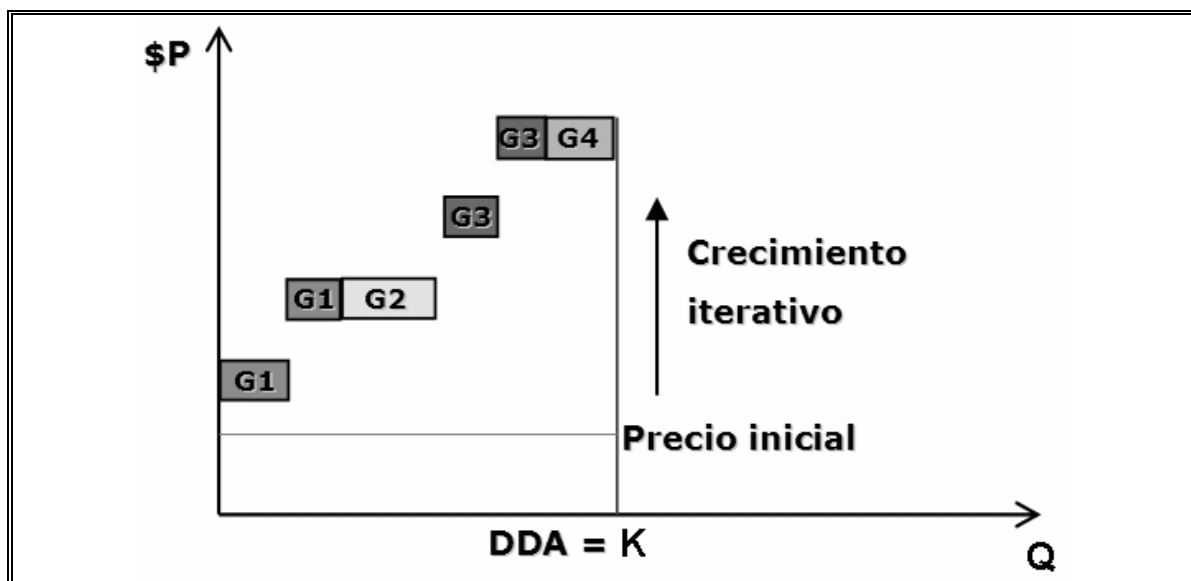


Figura 2- 8: Subasta holandesa multiproducto

Cada bloque horizontal en la Figura 2- 8 representa la cantidad ofertada (y negociada) por cada vendedor (G1 a G4) en cada una de las iteraciones.

- Subasta Pay-As-Bid Multiple Object: En este tipo de subasta se desean liquidar múltiples activos, por ejemplo, un número de K activos homogéneos. Para esto, el martillero solicita a los oferentes escribir sus ofertas en un papel, las cuales luego serán entregadas a éste en un sobre cerrado. Las ofertas de cada oferente deben incluir la cantidad ofrecida y el precio correspondiente de venta. Una vez abierta las ofertas de todos los oferentes, éstas se ordenan de menor a mayor, y quedarán adjudicadas aquellas que formen parte del conjunto de ofertas más económicas que pueden abastecer la demanda. El precio de negociación con cada oferente será el ofrecido por cada uno de éstos en sus respectivas ofertas. En la Tabla II- 2 y Figura 2- 9 se puede observar como se realiza la casación de este tipo de subasta.

Tabla II- 2: Tabla resumen de ofertas y negociaciones resultantes del proceso de subasta

Generadores	Precio Ofertado	Cantidad Ofertada	Precio Negociado	Cantidad Negociada
G1	10	20	10	20
G1	35	10	No Casado	No Casado
G2	18	15	18	15
G3	24	10	24	4

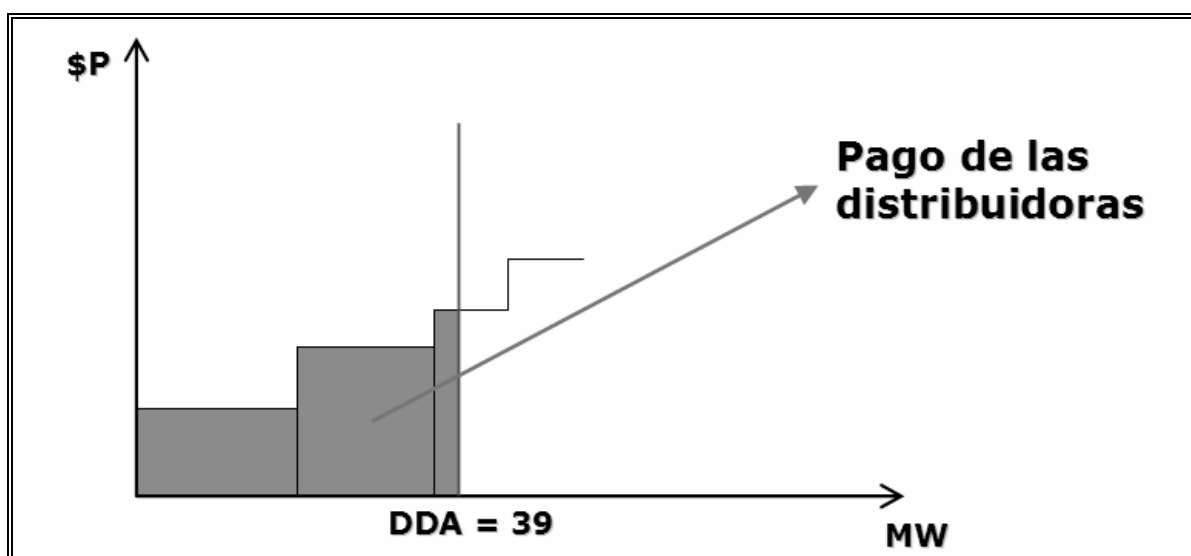


Figura 2- 9: Subasta pay-as-bid multiproducto

Para la construcción de la Tabla II- 2 y la Figura 2- 9 se ha considerado que los activos subastados son contratos de abastecimiento eléctrico, además se considera $K = 39$ MW, y obviamente los oferentes son generadores de energía eléctrica (G1 a G3). El bloque achurado bajo la curva de oferta agregada en la Figura 2- 9 indica el pago de las distribuidoras a los generadores casados.

- Subasta Precio Uniforme Multiple Object: En este tipo de subasta se desean liquidar múltiples activos, por ejemplo, un número de K activos homogéneos. Para esto, el martillero solicita a los oferentes escribir sus ofertas en un papel, las cuales luego serán entregadas a éste en un sobre cerrado. Las ofertas de cada oferente deben incluir la cantidad ofrecida y el precio correspondiente de venta. Una vez abierta las ofertas de todos los oferentes, éstas se ordenan de menor a mayor y quedarán adjudicadas aquellas que formen parte del conjunto de ofertas más económicas que pueden abastecer la demanda. El precio de negociación con cada oferente será el mismo y corresponde a la oferta con el precio más caro que resultó casada (precio de la unidad marginal). En la Tabla II- 3 y la Figura 2- 10 se puede observar como se realiza la casación de este tipo de subasta.

Tabla II- 3: Tabla resumen de ofertas y negociaciones resultantes del proceso de subasta

Generadores	Precio Ofertado	Cantidad Ofertada	Precio Negociado	Cantidad Negociada
G1	10	20	24	20
G1	35	10	No Casado	No Casado
G2	18	15	24	15
G3	24	10	24	4

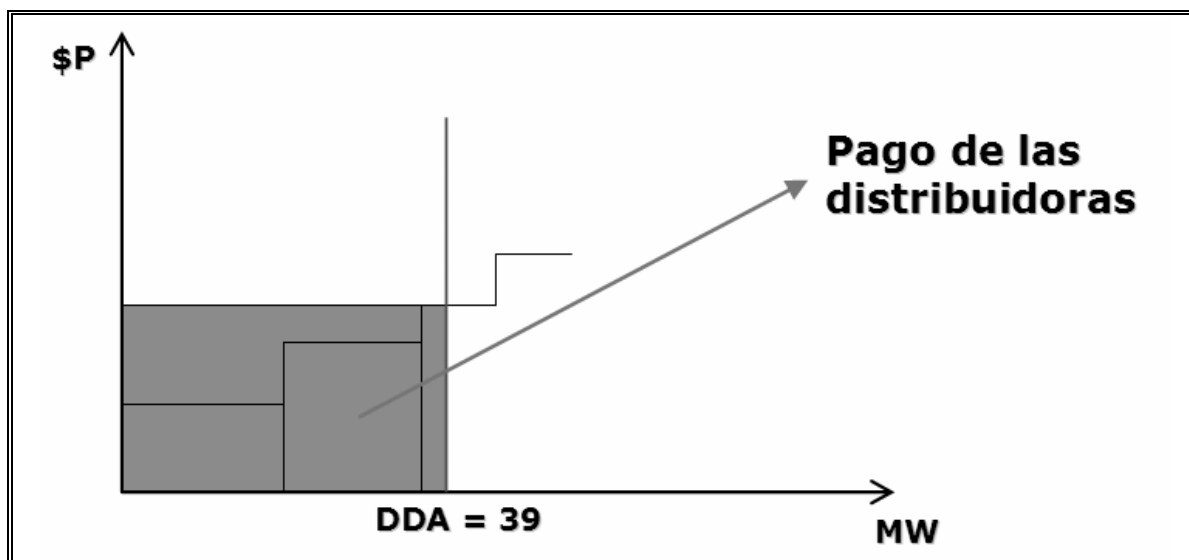


Figura 2- 10: Subasta precio uniforme multi-producto

Para la construcción de la Tabla II- 3 y la Figura 2- 10 se ha considerado que los activos subastados son contratos de abastecimiento eléctrico, además se considera que $K=39$ MW, y obviamente los oferentes son generadores de energía eléctrica (G1 a G3). El bloque achurado bajo la línea horizontal del precio de mercado en la Figura 2- 10, indica el pago de las distribuidoras a los generadores casados.

II.2.1.2. Acerca de la Valoración del Bien a Subastar

El activo a subastar puede ser de valor privado o de valor común. Se dice que una subasta es de valor privado cuando la valoración del bien a subastar es privada de cada individuo, y ésta no depende de la valoración que puedan tener los demás competidores acerca del bien. Se puede citar como ejemplo una subasta de una obra de arte, en la cual el valor que le asigna cada competidor a la obra subastada es totalmente independiente de la valoración del resto, es decir, la disposición a pagar de un individuo va a depender solamente de si mismo y de cuanto le agrade dicha obra. Por el contrario, se dice que una subasta es de valor común cuando la valoración del bien a subastar es común a todos los individuos. Típicamente, si bien el valor es común a todos los individuos, éste es

desconocido, así la valoración que cada individuo tiene acerca del bien a subastar depende o es influenciada por la valoración del resto, ya que todos los participantes están intentando vislumbrar un valor que es común a todos. Un típico ejemplo de este tipo de esquema es una subasta por un campo de petróleo, el valor de éste debe ser aproximadamente el mismo para cada uno de los participantes, ya que ninguno de ellos tiene una ventaja significativa frente al resto para rentabilizar el terreno. El valor de dicho terreno depende fundamentalmente de las reservas de petróleo, así cada uno de los individuos tendrá una estimación privada de dichas reservas, y por lo tanto del valor del terreno. Estas valoraciones, estimaciones o creencias privadas acerca del real valor del campo de petróleo pueden ser influenciadas por la información que tenga el resto de los participantes acerca del valor del mismo.

En las subastas de valor común existe un fenómeno denominado *La Maldición del Ganador*¹⁶. Ésta explica como el ganador de una subasta se puede transformar en un perdedor. En una subasta de valor común, el valor del objeto a subastar es el mismo para todos, por lo tanto lo más probable es que el real valor esté en la media de todas las estimaciones. Por lo tanto, el jugador que gana la subasta es el que más se ha equivocado en sus estimaciones, ya que es el que ofrece el precio más alto¹⁷. En conclusión, el ganador paga un precio excesivamente caro por el bien.

II.2.2. Teorema de Equivalencia de la Remuneración

Para el caso de subastas uniproducto (Single Object Auction), se puede demostrar una equivalencia entre los distintos tipos de formatos de subastas presentados anteriormente, en cuanto al equilibrio alcanzado por cada una de éstas. Desde el punto de vista de la estrategia de oferta, se puede demostrar que la subasta inglesa es análoga a la subasta de segundo precio, mientras que la subasta holandesa es equivalente a la subasta de primer precio. La diferencia entre ellas es que en la subasta inglesa los agentes pueden

¹⁶ Capen, E., Clapp, R. y Campbell, W. (1971) *Competitive Bidding in High-Risk Situations*

¹⁷ En una subasta referida a la oferta

ofertar empleando únicamente información sobre su propia valoración del bien, mientras que en la subasta holandesa es necesario estimar el comportamiento del resto de los competidores.

A pesar de lo anterior, todos los tipos de subastas descritos¹⁸ convergen siempre al mismo resultado en valor esperado, y en todos los casos se trata de un resultado eficiente, dicho en otras palabras, todos llevan al mismo precio (la misma remuneración para el vendedor) y a la misma asignación. Este resultado se conoce bajo el nombre de *Teorema de Equivalencia de la Remuneración*¹⁹. Dicha equivalencia se puede extender tanto a subastas de valor privado como de valor común²⁰. Sin embargo, existen casos en los cuales el teorema de la equivalencia no es válido, éstos se presentan principalmente cuando los valores del bien a subastar son interdependientes entre los individuos y la información privada de cada individuo acerca del valor del bien está *afiliada*²¹ entre los participantes²².

Los resultados teóricos que existen sobre las subastas multi-producto (Multiple Object Auction) son bastante más limitados que para el caso de subasta de un único bien. Sin embargo es posible demostrar, en algunos escenarios, que el teorema de equivalencia de la remuneración se sigue cumpliendo. Uno de estos escenarios es el caso de subastas donde cada comprador únicamente desea adquirir un objeto, como sucede por ejemplo, en las ventas públicas de propiedades inmobiliarias, éste corresponde al caso más simplificado de todos y al más estudiado. Aunque la teoría también ha demostrado la equivalencia de remuneraciones entre los casos de subastas en donde se venden todos los bienes al mismo tiempo, y en donde se realizan sucesiones de subastas de una unidad en las cuales los bienes se venden secuencialmente, en la práctica se observa que los precios que resultan en las diferentes subastas secuenciales, van disminuyendo en forma progresiva. A este efecto se le conoce como anomalía de los precios decrecientes, o efecto

¹⁸ El resultado se puede extender a todas las subastas del tipo estándar. Se entiende por subasta estándar aquellas en las cuales el ganador es el que presenta la oferta más cara (subasta referenciada a la oferta)

¹⁹ Riley, J. y Samuelson, W. (1981) *Optimal Auction*

²⁰ Kemplerer, P. (1999) *Auction Theory: A Guide to the Literature*

²¹ Se entiende por variables afiliadas aquellas que están fuertemente correlacionadas

vespertino²³, y aunque aún no existe acuerdo respecto de su origen, es probable que éste sea provocado por la aversión al riesgo de los participantes²⁴.

II.2.3. Concepto de Solución en Subastas

Para finalizar el marco teórico, resta mencionar que para encontrar una solución a los juegos de subasta es necesario computar el equilibrio de Bayes del juego. Para este caso, dicho equilibrio bayesiano deriva en la siguiente expresión²⁵:

$$b_i = \text{Arg max}_{b_i'} \left\{ \sum_{x \leq b_i'} \text{Utilidad}(b_i') \times \text{Prob}(\max\{b'_{-i}\} = x) \right\}$$

Donde:

b_i = Oferta óptima a presentar en la subasta por individuo i .

b_i' = Oferta a presentar en la subasta por individuo i .

$\text{Prob}(\max\{b_{-i}'\} = x)$ = Probabilidad de que el máximo de las ofertas del resto de los individuos sea igual a x .

Es necesario mencionar, también, que la función objetivo de la maximización está referida a la oferta, así el conjunto sobre el cual se realiza la sumatoria, $x \leq b_i'$, forma el total de escenarios posibles sobre el cual el sujeto i resulta ganador de la subasta.

Por último, si se considera el hecho que todos los individuos obedecen a una estrategia $\beta(\cdot)$, la cual es creciente en la valoración del bien, y además que los dominios del problema son continuos, entonces el equilibrio se puede escribir en términos de la función de probabilidad de las valoraciones. Así, la forma del problema de optimización que resuelve cada participante tiene la siguiente estructura:

$$b_i = \text{Arg max}_{b_i'} \left\{ \int U_i(b_i', v_i) p(v_{-i} | v_i) dv_{-i} \right\}$$

²² Krishna, V. (2002) *Auction Theory*, Cap.6

²³ Ashenfelter, O. (1989) *How Auctions Work for Wine and Art*

²⁴ Vázquez, C. (2003) *Modelos de Casación de Ofertas en Mercados Eléctricos*

Donde:

U_i = Utilidad del individuo i .

v_i = Valoración del bien a subastar del individuo i .

v_{-i} = Valoración del bien a subastar del resto de los individuos.

p = Función de densidad de probabilidad de la valoración del resto de los agentes dado v_i .

²⁵ Para funciones de probabilidad discretas.

III. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

En mayo del 2005, se aprobó un cambio en la Ley DFL N° 1 que permite a las concesionarias de servicio público de distribución de electricidad licitar sus suministros de energía. De dicho proceso de licitación, resultará el precio al cual los agentes distribuidores y generadores negociarán las transferencias de energía. A pesar que el nuevo articulado ha dejado varios puntos pendientes, los cuales deberán ser desarrollados más adelante en el reglamento, éste delinea las principales directrices del proceso de licitación, entre las cuales se encuentran:

- Cada distribuidora debe disponer del suministro de energía de a los menos los próximos 3 años. Dicho suministro debe provenir, ya sea de contratos o de generación propia.
- Los contratos de suministros deben ser obtenidos mediante licitaciones, las cuales deben ser: públicas, abiertas, no discriminatorias y transparentes.
- Se establece que las distribuidoras se pueden coordinar para licitar el conjunto de su demanda (agregada).
- Las bases de las licitaciones las deben elaborar las propias distribuidoras, previa aprobación de la Comisión Nacional de Energía, en adelante CNE.
- Los contratos licitados no deben exceder de un periodo de 15 años.
- Existencia de un umbral que representa el porcentaje máximo de los requerimientos de energía para clientes regulados a negociar en cada contrato.
- El precio de la energía presentado por el oferente en la licitación no puede ser superior a un umbral calculado en base al precio nudo vigente (precio de reserva).
- Para los contratos negociados mediante una licitación el precio de la potencia no se actualizará en cada cálculo de precio nudo, sino que se indexará según una formula previamente establecida.
- La licitación se adjudica por menor precio.

- La indexación de los precios de energía y potencia pueden ser definidas tanto en las bases, como en las mismas ofertas de los generadores.

Así, el problema a analizar en la presente tesis será básicamente el estudio del equilibrio de mercado cuando una o varias distribuidoras deciden licitar su abastecimiento eléctrico en el mercado nacional. Una complejidad adicional que significa tratar el caso chileno, es que la nueva legislación no fija el mecanismo de subasta a ser utilizado, permitiendo a las distribuidoras confeccionar las bases de licitación, lo cual crea una cierta dependencia de los equilibrios a éstas. Además, dicha libertad puede condicionar a los distintos generadores a actuar de distintas maneras en cada mecanismo particular especificado en cada una de las bases de licitación, provocando situaciones de inestabilidad de precios.

Así, básicamente esta tesis presenta un análisis cuantitativo de tres modelos de licitación, en dos de ellos cada distribuidora licita sus propios abastecimientos, y en el otro, dos distribuidoras se coordinan para licitar su demanda agregada. En todos estos casos se considerarán las reglas del juego que introducen los nuevos cambios de ley en el mercado eléctrico chileno. Además, posteriormente se presentará un análisis cualitativo de los resultados, el cual será de utilidad para predecir el comportamiento del mercado en casos donde se relajan los principales supuestos del análisis cuantitativo.

III.1. Evidencia Teórica y Empírica

La literatura técnica ha estudiado el caso de subastas eléctricas, pero principalmente a las que se dan lugar dentro de una bolsa de energía en el mercado spot, las subastas de contratos de abastecimiento han sido poco estudiadas. Además, una complicación adicional al análisis es que se debe considerar la particular coexistencia entre el denominado *mercado spot* y esta nueva concepción de *mercado regulado*. Según esta nueva concepción, el precio de compra-venta de energía se deriva de un proceso de licitación, mientras el precio en el mercado spot continua siendo despejado en función de un modelo

de despacho a costo marginal realizado por los Centros de Despacho Económicos de Carga correspondientes a cada sistema, en lo sucesivo CDECs.

Se encuentran en desarrollo experiencias similares a la chilena, las cuales se han presentado en otros países latinoamericanos como, Brasil, Perú y Colombia. Entre éstas, el modelo más disímil es el caso colombiano, ya que el mercado spot en este país cuenta con un esquema de bolsa. A pesar de esto, a continuación se describirán sólo las experiencias de subastas de Colombia y Brasil, ya que el caso peruano aún está en etapa de Proyecto de Ley.

III.1.1. Estudio Descriptivo de Dos Casos: El Mercado Colombiano y El Mercado Brasileiro

III.1.1.1. Mercado Colombiano

El mercado eléctrico colombiano está integrado por distintos agentes participantes que se clasifican según su actividad en:

- Generadores
- Transportadores
- Distribuidores
- Comercializadores

Estos agentes participan en el proceso productivo de la generación, transmisión, distribución y comercialización de electricidad para abastecer la demanda proveniente del consumidor final. Este último, puede pertenecer a uno de los dos mercados existentes. Un mercado libre, conformado por clientes industriales y grandes clientes, y un mercado regulado, conformado por clientes residenciales y comerciales.

En éste contexto, el marco regulatorio está orientado a organizar las transacciones entre los distintos agentes sectoriales de manera eficiente y económica. Con este fin, existe una instancia denominada *Mercado Mayorista de Electricidad (MEM)*, la cual está

definida como el conjunto de sistemas de intercambio de información entre generadores y comercializadores de grandes bloques de energía en el *Sistema Interconectado Nacional (SIN)*. Estas transacciones realizadas entre generadores y comercializador en el MEM se llevan a cabo bajo dos modalidades:

- Mediante la suscripción de contratos bilaterales de compra garantizada de energía.
- Por medio de transacciones directas en la bolsa de energía, en la cual los precios se determinan por el libre juego de la oferta y la demanda.

Como es común ver en éstos mercados, los contratos bilaterales no garantizan la entrega física de energía, sino que son un mero instrumento financiero que los generadores utilizan para cubrirse del riesgo.

Respecto a los contratos bilaterales, las compras de energía realizadas por comercializadores con destino a usuarios regulados, se rigen por disposiciones legales que garantizan la competencia en este tipo de transacciones. Por otro lado, las compras de energía realizadas por comercializadores con destino a usuarios del mercado libre, no están reguladas y se negocia los precios y condiciones libremente.

No hay restricción sobre el horizonte de tiempo que deben cubrir los contratos bilaterales. Es decisión de los agentes su grado de exposición en el mercado spot. No obstante, durante el periodo de transición, existieron obligaciones para los comercializadores que atienden usuarios regulados. Así, los comercializadores estuvieron obligados a cubrir un porcentaje mínimo de sus requerimientos mediante contratos bilaterales con otros agentes: 80% para el periodo comprendido entre el 20 de julio de 1995 y 30 de noviembre de 1996, 60% para los siguientes dos años, y 30% para el último año. A partir de noviembre de 1999 el porcentaje es libre.

No hay restricción sobre la capacidad que un agente generador o comercializador puede comprometer en contratos bilaterales.

Para asegurar la libre competencia, tanto generadores (con capacidad mayor a 20 MW), como comercializadores (que atienden a clientes regulados), están obligados a participar del MEM y realizar sus transacciones de venta a clientes regulados por esta vía.

Los generadores que participan en el MEM deben presentar ofertas uninodales de precio en la bolsa de energía. Estos precios, que las empresas generadoras ofrecen horaria y diariamente en el *Centro Nacional de Despacho (CND)*, deben reflejar los costos variables de generación que se esperan incurrir. Para efectuar las distintas ofertas de precio existen reglas operativas y un cronograma de presentación de dichas ofertas.

Los generadores que desean vender energía con destino al mercado regulado mediante contratos bilaterales, deben hacerlo mediante procedimientos de licitación que aseguran la libre competencia. Así, toda solicitud de ofertas de venta o suministro de electricidad destinadas a cubrir el mercado regulado, deberá cumplir con el artículo 50 de la resolución CREG-020/96, el cual básicamente plantea que la convocatoria de abastecimiento debe ser bien publicitada, señalando todas las condiciones que deben cumplir las ofertas. En general, factores distintos del precio no pueden servir como base para seleccionar una oferta. Además, se debe permitir la oferta de suministros parciales por distintos generadores y por cualquier cantidad de electricidad. Las distintas ofertas deben depositarse en sobre cerrado dentro de una urna, su apertura debe efectuarse simultáneamente y en acto público. Además, las ofertas presentadas por los generadores deben especificar claramente las reglas o procedimientos para determinar con una resolución horaria el precio y cantidad exigibles durante la vigencia del contrato. Finalmente, si la convocatoria se trata de compras de energía por periodos superiores a dos años, la empresa comercializadora debe otorgar un plazo no inferior a tres meses para la elaboración de las propuestas.

Respecto a otros temas relevantes, la legislación no permite la integración vertical, exigiendo límites en los porcentajes de propiedad de una empresa sobre otra. Además, las empresas que desarrollan en forma conjunta la actividad de generación con la de comercialización, no pueden atender la demanda con energía propia, a menos que,

previamente haga una convocatoria pública de abastecimiento y la gane, es decir, que el precio propuesta por ella sea inferior al precio propuesto por terceros. Tales convocatorias deberán efectuarse por toda la electricidad necesaria para atender el mercado regulado, y no sólo para cubrir la diferencia entre la demanda propia y la demanda de ese mercado. A parte de los contratos bilaterales de largo plazo, otra medida para incentivar la inversión es el pago por capacidad, el cual garantiza un flujo mínimo de ingresos a aquellos agentes generadores que contribuyen con potencia firme al sistema.

Por último, es importante destacar que la frecuencia de las subastas es variable debido a que las licitaciones se convocan en la medida que los contratos de abastecimientos de cada distribuidor van venciendo. Formalizando el esquema de subasta utilizado, éste se puede definir como un mecanismo de licitación de sobre cerrado multiproducto.

III.1.1.1.1. Equilibrio y Resultados del Modelo Colombiano

Las subastas de contratos eléctricos de largo plazo permiten negociar de manera competitiva dichos contratos entre generadores y comercializadores en el mercado eléctrico colombiano. Con el fin de analizar de manera sencilla dicha competitividad, se presenta en la Figura 3- 1 la diferencia histórica que presentan los precios de los contratos licitados frente a los precios de bolsa del mercado spot.

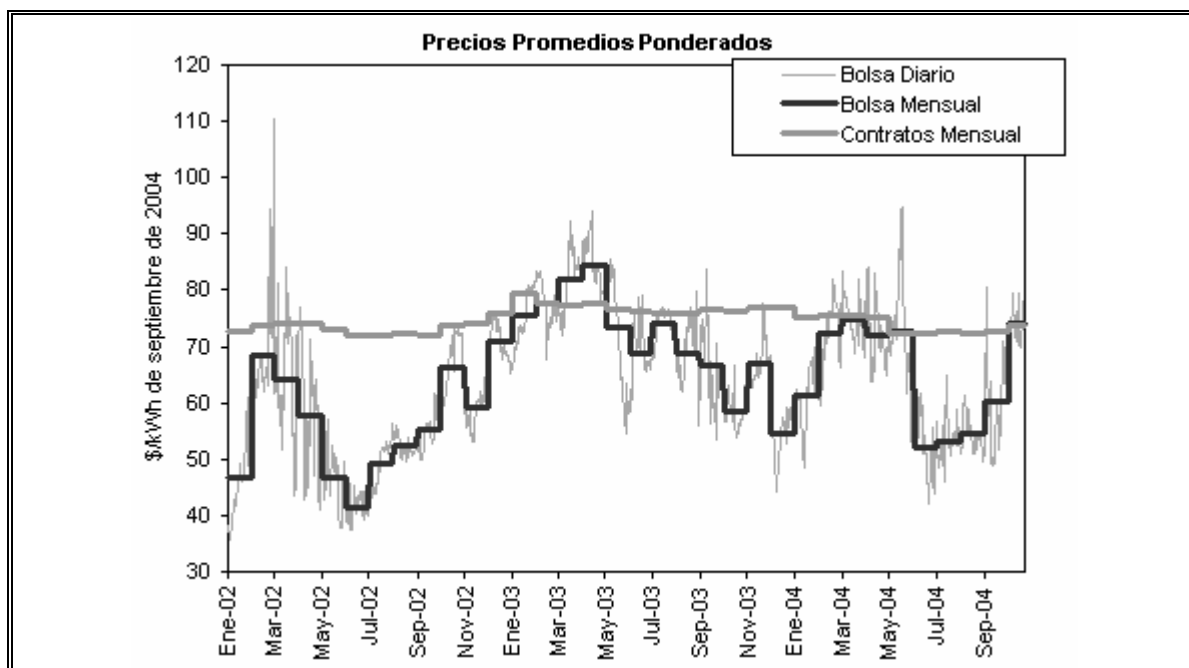


Figura 3- 1: Precios promedios ponderados históricos en el MEM

En la Figura 3- 1 se observa claramente que en más del 50% del periodo analizado el precio de contratos es mayor al precio spot. Además, se puede observar que el precio promedio de contratos está por sobre el precio promedio spot lo que permite que la industria de generación obtenga rentabilidades favorables mediante la contratación a largo plazo. Esto a pesar que en pequeñas ventanas de tiempo (marzo 2003, mayo 2003) el precio spot se encuentra por sobre el precio medio mensual de contratos.

En conclusión, el mecanismo de licitaciones colombiano despeja precios de negociación en contratación bilateral que reflejan los costos de la industria generadora, además de conservar márgenes de rentabilidad razonables para dicha industria.

III.1.1.2. El Mercado Brasileiro

El 7 de diciembre de 2004 se llevó a cabo la primera subasta de energía eléctrica en Brasil. Ésta surgió como consecuencia de las reformas que ha estado sufriendo el sector eléctrico desde que el gobierno actual ganó las elecciones presidenciales en noviembre de

2002. En esta directriz el gobierno publicó, en diciembre de 2003, varias medidas provisionarias, las cuales fueron posteriormente aprobadas por el congreso en marzo de 2004.

III.1.1.2.1. Breve descripción de la nueva regulación

En función del artículo N° 2 de la Ley N° 18.848, del 15 de marzo de 2004, todas las distribuidoras pertenecientes al Sistema Interconectado Nacional (SIN) deben garantizar el suministro de energía mediante contratos regulados obtenidos en base a una licitación. En el mismo articulado se establece que el responsable de realizar y regular las licitaciones será la Agencia Nacional de Energía Eléctrica (ANEEL).

Este nuevo marco regulatorio contempla que la totalidad de la demanda regulada proveniente de empresas distribuidoras debe estar contratada en todo momento. Los contratos que regulan la interacción entre distribuidores y vendedores deben ser contratos estandarizados y asignados mediante una subasta.

El nuevo marco contempla cuatro tipos de subastas más una subasta especial a realizarse en diciembre de 2004. Los distintos tipos de subastas son:

- Subasta de energía nueva: Este tipo de subastas está dirigida a abastecer futuras demandas de electricidad mediante la construcción de nueva capacidad generadora. Estos contratos están enfocados a incentivar la inversión, debido a que se negocian con 5 años de anticipación al comienzo de la operación.
- Subasta de energía existente: Este tipo de subastas está dirigida a cubrir la demanda actual.
- Subasta de ajuste: Este tipo de subasta es similar a la subasta de energía existente, pero ésta está destinada a realizar un ajuste fino a la cobertura total de la demanda mediante contratos.
- Subasta de energía distribuida: Este tipo de subastas posee reglas especiales para contratar energía producida mediante centrales interconectadas al interior de la red de distribución.

- Subasta especial de energía existente: Esta subasta, la cual fue realizada el día 7 de diciembre de 2004, estuvo destinada a pre-contratar energía libre. En ésta se remataron 3 tipos de contratos, en lo sucesivo productos, los cuales se describen a continuación:
 - Producto 2005-08: Contratos con fecha de inicio de operaciones el día 1/1/2005 y cuya duración abarca 8 años.
 - Producto 2006-08: Contratos con fecha de inicio de operaciones el día 1/1/2006 y cuya duración abarca 8 años.
 - Producto 2007-08: Contratos con fecha de inicio de operaciones el día 1/1/2007 y cuya duración abarca 8 años.

Los consumidores con potencia sobre 3 MW son considerados clientes libres, los cuales poseen la posibilidad de negociar directamente su abastecimiento con los vendedores.

A continuación, se describirá con un nivel mayor de detalle los tipos de subastas anteriormente descritos.

III.1.1.2.2. Subasta de energía nueva

Cada año se realizarán dos tipos de subastas de energía nueva, las cuales están destinadas a abastecer la demanda mediante la construcción de nueva capacidad de generación. Estos dos tipos de subastas son:

- Subasta principal: Ésta ofrece a los inversionistas la garantía de contar con contratos de duración de 20 años, y con fecha de inicio de operaciones 5 años después de haber sido adjudicado el contrato. Esto le da el tiempo suficiente al inversionista para construir la nueva planta, y posteriormente, poder contar con flujos de caja que minimicen el riesgo de la inversión. El inconveniente de este tipo de subastas es que requiere de una precisa previsión de demanda.
- Subasta complementaria: Ésta es similar a la anterior, con la diferencia que la fecha de inicio de operaciones es 3 años después de haber sido adjudicado el

contrato. El concepto es que esta subasta complementa a la subasta realizada dos años atrás (subasta principal), debido a que en el momento de su realización hay menos incertidumbre en la previsión de la demanda.

En consecuencia, estas dos subastas interactúan de manera complementaria, contrarrestando el efecto negativo que provoca la volatilidad de la demanda.

III.1.1.2.3. Subasta de energía existente

Este tipo de subastas permite complementar a la subasta de energía nueva, y así cubrir el 100% de la demanda. Esta subasta también se realiza una vez al año, y en ésta se celebran contratos de duración de 5, 6, 7 y 8 años. Dichos contratos comienzan a operar a partir del 1 de enero del año siguiente a la subasta.

III.1.1.2.4. Subasta de ajuste

Este tipo de subastas son realizadas 4 veces al año de manera de efectuar un ajuste fino a la cobertura total de la demanda. Los contratos celebrados en éstas comienzan a operar dentro del mismo año y tienen una duración de, a lo más, 2 años.

III.1.1.2.5. Subasta de energía distribuida

Esta es una subasta especial para contratar generación distribuida presente dentro de la malla de bajo voltaje de distribución. Hasta un 10% de la demanda de una distribuidora puede ser cubierta mediante este tipo de contratos.

III.1.1.2.6. Breve descripción de las reglas para las subastas de energía nueva y energía existente

Sesenta días antes de la subasta, las empresas distribuidoras deben declarar su demanda de energía a ser licitada. Esta declaración se debe realizar mediante un número entero de bloques de 1 MW de potencia promedio, en lo sucesivo lotes. Cada uno de estos

lotes se agrupa por producto, obteniendo una demanda agregada del sistema a nivel de productos.

En la subasta de energía existente, cada vendedor participante realiza una oferta por una cantidad de lotes de un cierto producto a un precio P en unidades de $\text{R\$/MWh}$. Dichas ofertas se realizan mediante un proceso iterativo el cual será descrito detalladamente en las próximas páginas de esta investigación. Cada oferta proveniente de los distintos vendedores debe estar avalada tanto por capacidad física como por garantías financieras.

En la subasta de energía nueva, los inversionistas deben optar, inicialmente, entre las distintas opciones de plantas hidroeléctricas que ofrece el plan de obras elaborado por el Ministerio de Minería y Energía, en lo sucesivo MME. Las distintas opciones del plan de obras cuentan con la licencia ambiental aprobada, lo cual elimina uno de los riesgos de la inversión. Sin embargo, el inversionista tiene la opción de agregar nuevas opciones al plan de obras, tales como, plantas térmicas, interconexiones internacionales, plantas de energías renovables, etc. Luego, con el fin de realizar una oferta a la subasta, los inversionistas piden una remuneración fija en $\text{\$/año}$ en cada uno de los proyectos que a ellos les interesa. Así, con esto, y con la información de capacidad de la planta en MWh/año , se puede obtener la oferta de cada inversionista en $\text{\$/MWh}$, el cual es el precio ofertado a la subasta de energía nueva. La casación se realiza agregando las ofertas de los inversionistas en el plano precio-cantidad (PQ) de manera creciente en precio hasta que la cantidad de potencia promedio MW alcance el valor declarado por las distribuidoras.

Una vez que los ganadores de las subastas de energía nueva y de energía existente han sido declarados, éstos deben firmar contratos con cada una de las 64 distribuidoras. Cada distribuidora negocia una cantidad de lotes proporcional al total de lotes declarados por ella.

En un contrato de energía existente se puede reducir la cantidad pactada para contrarrestar el efecto que se produce debido a que las distribuidoras pierden clientes que

emigran al mercado libre. Sin embargo, esta reducción de la cantidad de energía contratada no debe sobrepasar el 4% anual.

Otro avance del modelo brasilero, que permite disminuir riesgo para el inversionista, es el hecho que en el nuevo marco regulatorio los permisos de concesión para una planta hidroeléctrica se adjudican automáticamente al firmar el contrato (obtenido mediante una subasta). En contrataste con el esquema antiguo, en el cual el inversionista debía obtener primero los permisos de concesión y luego celebrar el contrato.

III.1.1.2.7. Detalle del proceso de subasta

El proceso de subasta tiene por finalidad crear un mecanismo competitivo, mediante el cual los distribuidores puedan adquirir la energía eléctrica proveniente desde los vendedores, asegurando la publicidad, la transparencia y la igualdad de acceso.

En el proceso de subasta se rematan diferentes productos, los cuales se diferencian entre si debido a que son contratos, por bloques de energía, que tienen distinta fecha de inicio y distinta duración.

La subasta se desarrolla mediante un sistema electrónico en donde los distintos vendedores pueden realizar sus ofertas de manera iterativa. Mientras los vendedores están realizando sus ofertas, estos tienen comunicación limitada con el exterior.

Antes del comienzo de la subasta el MME debe ingresar al sistema las siguientes variables:

- Factor de referencia: Es un porcentaje que se utiliza para calcular la oferta de referencia, la cual a su vez, se utiliza como condición de término para la fase I de la subasta.
- Parámetros para el cálculo del decrecimiento: Estos parámetros se utilizan para calcular el decrecimiento del precio de mercado en (R\$/MWh) de cada producto entre cada rueda. El decrecimiento es un diferencial que al restarlo del precio de mercado de cada producto, entrega el precio de mercado del producto para ser ofrecido por cada vendedor en la siguiente rueda.

- Cantidades declaradas: Estas son las cantidades de demanda declaradas por cada compañía distribuidora a nivel de producto. Al sumar las cantidades declaradas por cada distribuidora, resulta la demanda total de todo el sistema por productos.
- Precio inicial de cada producto: Es el precio con el cual se comienza la subasta de cada producto. Corresponde al precio de mercado de la primera rueda de la subasta.
- Precio de reserva: Corresponde al precio máximo al cual se puede firmar un contrato por un determinado producto.

Una vez iniciada la subasta, no hay plazo para el cierre, ya que éste se encuentra en función de un número indeterminado de iteraciones.

La subasta de energía existente está conformada por dos fases, una de clasificación y otra de negociación, estas fases conforman un mecanismo híbrido de subasta. La primera fase de clasificación, corresponde a un modelo modificado²⁶ de subasta inglesa multi-producto, mientras que la segunda etapa de negociación corresponde a un modelo clásico de subasta de sobre cerrado pay-as-bid multi-producto. A continuación, la Figura 3- 2 ilustra ambas fases del proceso de licitación brasileiro, enseguida se explica brevemente en que consiste cada una de éstas.

²⁶ Dicho modelo modificado lleva por nombre: *a multi-product descending clock auction*

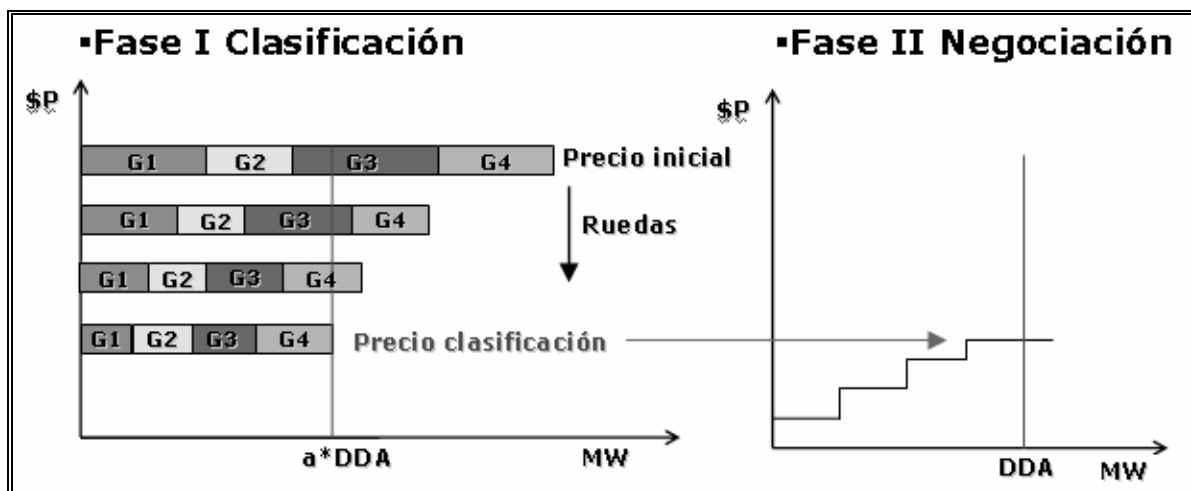


Figura 3- 2: Fases del proceso de licitación en Brasil

En cada rueda de la fase I los vendedores deben ir ingresando una cantidad dispuesta a vender de cada producto al precio especificado por el sistema. El precio especificado por el sistema corresponde al precio de mercado obtenido en la rueda anterior menos un decrecimiento calculado por este mismo. El precio de mercado para la primera iteración está determinado mediante un precio inicial ingresado al sistema por el MME, y con el cual se desea dar comienzo a la subasta. La fase I itera mientras el sistema detecte sobreoferta. El sistema finaliza la fase I cuando la *demanda virtual*²⁷ es igual a la oferta.

La fase II sólo contiene una rueda, en la cual se negocian definitivamente los contratos subastados. En ésta parte del proceso el vendedor es libre de ofrecer un precio por los distintos lotes deseados, de manera que este precio sea igual o inferior al precio de mercado resultante de la fase anterior.

Finalmente, la energía asignada a cada vendedor mediante el proceso de subasta anteriormente descrito es concedida a cada distribuidor mediante una prorrata en función de la demanda declarada por cada uno de éstos. Los puntos de entrega de la energía negociada corresponden a los centros de carga de cada subsistema.

El propósito de diseñar una subasta con dos fases es permitir una competencia más agresiva, ya que en la primera fase las múltiples rondas ayudan a despejar la incertidumbre del valor común, permitiendo a los generadores competir con menor posibilidad de caer en la maldición del ganador, mientras que la segunda fase permite disminuir comportamientos colusivos entre los competidores²⁸.

III.1.1.2.8. Equilibrio y Resultados del Modelo Brasileiro: Primera Subasta

El día 7 de diciembre de 2004 se realizó la primera subasta de energía en Brasil. Dicha subasta se organizó para realizar contratos del tipo energía existente en el sistema, por lo tanto, consistió en remates de contratos de corto plazo. Los productos ofrecidos en esta subasta fueron:

- Producto 2005-08: Contratos con fecha de inicio de operaciones el día 1/1/2005 y cuya duración abarca 8 años.
- Producto 2006-08: Contratos con fecha de inicio de operaciones el día 1/1/2006 y cuya duración abarca 8 años.
- Producto 2007-08: Contratos con fecha de inicio de operaciones el día 1/1/2007 y cuya duración abarca 8 años.

Conforme a lo informado por la ANEEL la subasta estuvo conducida por el Mercado Atacadista de Energía Eléctrica, en lo sucesivo MAE, en calidad de entidad coordinadora de la subasta.

La subasta estuvo conformada por veinte y una ruedas en la primera fase y por una en la segunda fase. El proceso completo de subasta abarcó desde las 11:00 A.M. hasta las 7:00 P.M., incluyendo la divulgación de resultados. Los participantes incluyeron a 18

²⁷ La demanda virtual corresponde a la demanda original aumentada en un porcentaje (de referencia). Esta sobreestimación de demanda permite que las ofertas en la etapa de negociación sean más agresivas, ya que los oferentes desconocen el real valor de ésta.

²⁸ Binmore, K. Von der Fehr, N. Hardbord, D. and Jewitt, I. (2004) *Comments on the Proposed Electricity Contract Auction in Brazil*

agentes autorizados como vendedores y 35 distribuidores que declararon su demanda previo inicio de la subasta.

En total se contrataron 17.008 lotes (MW) del total de productos, la cantidad por producto, junto con su precio medio de cierre se puede observar en la Tabla III- 1:

Tabla III- 1: Resultado de primera subasta brasilera²⁹

2005-08		2006-08		2007-08		Total de Lotes Vendidos
Lotes vendidos	Precio Medio de Cierre R\$/MWh	Lotes vendidos	Precio Medio de Cierre R\$/MWh	Lotes vendidos	Precio Medio de Cierre R\$/MWh	
9054	57,51	6782	67,33	1172	75,46	17008

Contrariamente a lo que se preveía, los precios resultaron muy lejanos a los precios pronosticados para la subasta. Mientras los expertos preveían precios del orden de 70 \$R/MWh para el año 2005, estos resultaron del orden de 58 R\$/MWh, muy por debajo del precio promedio de contratación observado en el último periodo antes de la subasta, el cual alcanzó los 65 R\$/MWh. Los expertos han mostrado una gran preocupación por el sector eléctrico después de publicados los resultados de la subasta, debido a que los 65 R\$/MWh observado como precio de la energía antes de la subasta, ya parecía ser un nivel de precios sin atractivo para los generadores. El hecho que los precios resultantes de la subasta fueron especialmente bajos se hizo sentir fuertemente en la bolsa de comercio, alcanzando caídas sobre el 10% para algunas empresas eléctricas el día 8 de diciembre.

Entre las razones más comunes que citan los expertos para justificar los resultados anteriormente descritos, se encuentra la alta participación de mercado del Estado en la industria generadora, la cual condujo los precios a la baja en la subasta ofertando grandes bloques de energía a bajo precio. Para ilustrar esta realidad se cita a continuación la columna de un reconocido profesional del área energética en Brasil:

²⁹ Fuente: <http://www.leiloesdomae.com.br>

“...Unfortunately I have to consider the result to be very negative for the generation business, the discounts were too high. The final result do not encourage new investments in the Brazilian electric energy sector...In my opinion, the worst problem was that the Government used its state owned electric generation utilities of the Eletrobras system to force prices down in the auction, in order to guarantee long term electric energy supply at low cost...”³⁰

Brevemente es pertinente mencionar que la segunda subasta de energías existentes, la cual se llevó a cabo el día 2 de abril de 2005, no logró contratar toda la demanda subastada. El objetivo de la subasta era rematar dos tipos de contrato (dos productos): 2008-08 y 2009-09. Si bien el precio medio despejado fue razonable (\$R 83 MWh), la cantidad negociada fue muy pobre, logrando contratar apenas la mitad de la demanda disponible en la subasta. Más aún, no fue posible negociar ningún lote del producto 2009-09. Dado estos hechos, la Ministra de Energía anunció cambios en las futuras subastas, como por ejemplo, que en cada una de éstas se licitará sólo un tipo de contrato.

Finalmente, en cuanto al modelo de subasta no se pueden obtener conclusiones definitivas mediante evidencia empírica, ya que el mecanismo ha sido poco utilizado con sólo tres jornadas realizadas³¹. A pesar de esto, se puede observar de los resultados anteriormente expuestos que el mecanismo es capaz de despejar precios bajos.

³⁰ Freitas, C. (2004) *Recent auction was not good at all for CIG*. www.yeald.com

³¹ A la fecha (29/10/05) se han realizado sólo dos subastas de energías existentes y una subasta de ajuste. Próximamente se realizará la tercera y cuarta subasta de energías existentes, los días 10 y 11 de octubre de 2005 respectivamente.

IV. MODELACIÓN DEL PROBLEMA

Uno de los objetivos de la presente tesis es estudiar cuantitativamente el esquema chileno de licitaciones mediante modelos matemáticos idealizados, que representen realidades físicas similares a las del mercado chileno. En este capítulo se presentan los supuestos y desarrollos de dichos modelos matemáticos, para luego analizar sus resultados en el siguiente capítulo.

En función del objetivo expuesto anteriormente, se analizará cuantitativamente el mercado chileno a través del estudio de 3 problemas ideales, los cuales se enuncian a continuación:

- Problema 1: Un distribuidor en el mercado eléctrico chileno licita un contrato por el abastecimiento de su demanda, el cual entra en vigencia en T años más y tiene una duración de D años. El distribuidor decide utilizar un mecanismo de licitación de sobre cerrado de primer precio por todo el bloque de demanda, es decir, un mecanismo donde se adjudique la licitación el generador que oferte el menor precio de venta, y en el cual el contrato sea negociado al precio ofertado por dicho generador.
- Problema 2: Un distribuidor en el mercado eléctrico chileno licita un contrato por el abastecimiento de su demanda, el cual entra en vigencia en T años más y tiene una duración de D años. El distribuidor decide utilizar un mecanismo de licitación de sobre cerrado de segundo precio por todo el bloque de demanda, es decir, un mecanismo donde se adjudique la licitación el generador que oferte el menor precio de venta, y en el cual el contrato sea negociado al precio ofertado por la segunda oferta más económica.
- Problema 3: Dos distribuidores del mercado eléctrico chileno se coordinan y licitan un gran bloque de demanda. Las condiciones de los contratos son entrada en operación en T años más y duración de D años cada uno. Los distribuidores

deciden utilizar un mecanismo de licitación de sobre cerrado pay-as-bid aceptando ofertas parciales por la mitad del bloque³².

Todos los problemas enunciados tienen un gran denominador común: éstos se realizan en el mismo mercado. Luego, las reglas generales de estos *juegos* deben ser acordes a las definiciones introducidas en la reciente Ley N° 20.018.

Particularmente, estos tres problemas fueron escogidos debido a que son los formatos que mejor se ajustan al set de reglas introducidos por la Resolución Exenta N° 611³³. Así, tres de los cuatro mecanismos de sobre cerrado son analizados mediante los problemas recientemente enunciados. El mecanismo de precio uniforme no es modelado debido a su extrema complejidad, aunque se realiza un análisis cualitativo a éste en el punto V.6.3.

Para efectos de este estudio se asume que los distribuidores al coordinarse y agregar su demanda llaman a una licitación multiproducto, dado el tamaño del bloque. De lo contrario, el problema se podría analizar simplemente con las soluciones de los problemas 1 y 2 enunciados anteriormente.

Para describir el comportamiento de los individuos participantes en los problemas recientemente introducidos, primero se debe analizar la función de utilidad de ellos, ya que dicho comportamiento está absolutamente condicionado a la estructura de esta función. Así, en el siguiente punto se presenta una simplificación razonable acerca de como perciben la utilidad los distintos oferentes en una subasta eléctrica en el mercado chileno.

IV.1. Función Objetivo: Margen de Subasta

Al modelar el proceso de licitación chileno como un juego y al analizar su estado de equilibrio, se requiere calcular el equilibrio bayesiano de dicho juego de información

³² Dado el rol pasivo de los distribuidores, este problema es equivalente a uno en el cual un solo distribuidor llama a licitación por el abastecimiento de su demanda aceptando ofertas parciales. En otras palabras, es indiferente quien llama a licitación.

³³ Para mayor detalle ver punto V.1.

incompleta. Para esto es necesario describir la función de utilidad o función de pagos de cada uno de los agentes, ya que ésta define sus comportamientos.

La función de pagos de un generador se puede definir como sus ingresos menos sus costos, en consecuencia los pagos anuales (t) para cada individuo resultan tener la siguiente estructura:

$$\text{Pago}^t = [E_c^t P_c^t + (E_{\text{tot}}^t - E_c^t) \times P_s^t] - C^t(E_{\text{tot}}^t)$$

Donde:

Pago^t = Pago del año t

E_c^t = Energía comprometida en contratos en el año t

P_c^t = Precio medio de contratos en el año t

E_{tot}^t = Energía total generada en el año t

P_s^t = Precio medio spot en el año t

$C^t(\cdot)$ = Función de costos de producción correspondiente al año t

Así, considerando esta estructura de pagos, un individuo participante de un proceso de licitación tendría los siguientes flujos, durante el periodo de vigencia del nuevo contrato, en el caso de ganar la licitación:

$$\text{Pago}^t_{c/cn} = [E_{cv}^t P_{cv}^t + E_{cn}^t P_{cn}^t + (E_{\text{tot}}^t - E_{cv}^t - E_{cn}^t) \times P_s^t] - C^t(E_{\text{tot}}^t)$$

Donde:

$\text{Pago}^t_{c/cn}$ = Pago del año t si se adjudica un nuevo contrato.

E_{cn}^t = Energía comprometida en el año t del nuevo contrato adjudicado.

E_{cv}^t = Energía comprometida en otros contratos (viejos) en el año t

P_{cn}^t = Precio en el año t del nuevo contrato adjudicado

P_{cv}^t = Precio medio de contratos viejos en el año t

Por otro lado, dicho individuo tendría la siguiente estructura de pagos, durante el periodo de vigencia del contrato licitado, en el caso de no ganar la licitación:

$$\text{Pago}_{s/cn}^t = [E_{cv}^t P_{cv}^t + (E_{tot}^t - E_{cv}^t) \times P_s^t] - C^t (E_{tot}^t)$$

Donde:

$\text{Pago}_{s/cn}^t$ = Pago del año t si no se adjudica un nuevo contrato

Respecto a la estructura de pagos anterior (con / sin contrato), lo primero que se puede observar es que se ha considerado en el análisis como único universo de contratos aquellos ya existentes junto con el nuevo contrato licitado. Si bien, es probable que este generador pueda firmar otros contratos bilaterales en el periodo de vigencia del contrato licitado en estudio, es muy difícil incorporar esta señal en la modelación, ya que el abanico de posibilidades se tornaría inmanejable. Por lo tanto, este hecho queda fuera de análisis.

Además, para realizar un análisis independiente del tiempo y basado en valores actuales, se puede suponer que el precio anual de negociación del nuevo contrato está en función de una cantidad base referida al año de licitación ($t=0$), la que se indexa en función de una tasa constante de crecimiento anual g . Por lo tanto, el precio de compra-venta de energía negociado para el año t se puede describir de la siguiente forma:

$$P_{cn}^t = P_{cn}^0 \times (1 + g)^t$$

Integrando todo lo anteriormente descrito, el generador tomará la decisión del precio a ofertar en la licitación en función del siguiente problema de optimización:

$$\text{Max}_{P_{cn}^0} \left\{ \left(\sum_{t=T}^{T+D} \frac{\text{Pago}_{c/cn}^t}{(1+r)^t} \right) \cdot \text{Prob}(\text{GanarLicitación}) + \left(\sum_{t=T}^{T+D} \frac{\text{Pago}_{s/cn}^t}{(1+r)^t} \right) \cdot \text{Prob}(\text{PerderLicitación}) \mid \text{tipo}_i \right\}$$

Donde:

T = Año de entrada en operación del contrato

D = Duración del contrato en años

$\text{Prob}(A)$ = Probabilidad de ocurrencia del evento A

r = Tasa de descuento (típicamente 10%)

$tipo_i$ = Conjunto de información privada de i

\bullet = Operatoria de multiplicación expresada informalmente³⁴

El problema de optimización recientemente expuesto es la representación completa³⁴ del equilibrio de Bayes-Nash del juego. Dicha representación completa es totalmente inmanejable e impracticable, por ejemplo, ésta requiere del conocimiento de variables como el nivel de contratación para cada generador, niveles de generación, costos de combustibles propios y especulación acerca del costo del resto de los oferentes, o especulación acerca del precio spot, las cuales son muy difíciles de computar a la vez.

Dada la complejidad de este problema, la teoría de subastas plantea un modelo simplificado, el cual se puede demostrar que bajo ciertos supuestos, es análogo al modelo expuesto recientemente.

En el punto II.2.3 se menciona que el equilibrio bayesiano para una subasta está dado por una integral de la forma:

$$b_i = \underset{b_i'}{\text{Arg max}} \left\{ \int U_i(b_i', v_i) \times p(v_{-i} | v_i) dv_{-i} \right\}$$

En la formulación anterior interviene un concepto denominado *valoración* del activo licitado (variables v_i). Así, mediante la utilización de éste, se puede definir el pago que un oferente debe recibir si se adjudica la subasta como:

$$\pi_i = \text{PNC}_i - V_i$$

Donde:

π_i = Beneficio del individuo i si se adjudica la licitación

³⁴ La representación es completa, pero informal. Matemáticamente, la probabilidad de ganar puede estar asociada a variables que intervienen en la función de pagos. Por esto, en una representación formal se debe considerar que la esperanza de una función de una variable aleatoria es: $E\{g(X)\} = \int_{D_x} g(x) \times f(x) dx$.

PNC_i = Precio de negociación del contrato pagado por la distribuidora al individuo i

V_i = Valoración del contrato por el individuo i

Es decir, en una subasta eléctrica, como las descritas en los problemas enunciados al inicio de este capítulo, cada individuo va a presentar una oferta que permita negociar un precio final que esté por sobre su valoración del contrato. La pregunta inmediata que surge dada la formulación anterior es: ¿cuál es el valor que percibe un generador de un contrato de abastecimiento licitado en el mercado eléctrico chileno? Dada la estructura de la función π_i , la respuesta obvia es que la valoración debiera corresponder al menor precio al cual cada generador está dispuesto a firmar un contrato bilateral de compra-venta.

Por otro lado, el mercado eléctrico chileno tiene una instancia de intercambio o de liquidación de desbalances de contratos entre generadores, denominado el *mercado spot*. Este mercado permite a las generadoras excedentarias³⁵ vender energía a las generadoras deficitarias, lo cual permite el equilibrio natural entre oferta y demanda. La existencia de dicho mercado spot permite tener una referencia acerca del menor precio al cual cada generador debiera negociar sus contratos bilaterales: el precio del mercado spot. Pues, si el generador está dispuesto a firmar un contrato por un precio menor al precio esperado en el mercado spot, éste está dispuesto a perder dinero³⁶, ya que podría vender la energía contratada a un mejor precio en el mercado spot.

El párrafo anterior revela uno de los supuestos fundamentales de la presente tesis, el cual en palabras formales se puede describir de la siguiente manera: la disponibilidad a vender energía de cada generador es fuertemente dependiente de sus creencias acerca del nivel de precios en el mercado spot. A continuación se presenta una formulación matemática que refleja lo anteriormente expuesto:

³⁵ Se entiende por generador excedentario a aquel que genera energía por sobre la energía comprometida en sus contratos. Se entiende por generador deficitario a aquel que genera energía bajo la energía comprometida en sus contratos

$$\pi_i = \sum_{t=T}^{T+D} \frac{P_{cn}^t Q^t}{(1+r)^t} - \sum_{t=T}^{T+D} \frac{P_s^t Q^t}{(1+r)^t}$$

Donde:

Q^t = Demanda de abastecimiento relacionada al contrato en el año t

Por lo tanto, de la formulación anterior se puede observar que una negociación beneficiosa ($\pi_i > 0$) se presenta cuando el precio despejado por la subasta es tal que los ingresos por venta comprometidos en el contrato adjudicado son superiores a la alternativa sin contrato. Finalmente, el equilibrio bayesiano se puede escribir como:

$$\text{Max} \left\{ \left(\sum_{t=T}^{T+D} \frac{P_{cn}^t Q^t}{(1+r)^t} - \sum_{t=T}^{T+D} \frac{P_s^t Q^t}{(1+r)^t} \right) \cdot \text{Pr ob(Ganar Licitación)} \mid \text{tipo}_i \right\} \Leftrightarrow$$

$$\text{Max} \left\{ \left(P_{cn} \sum_{t=T}^{T+D} \frac{Q^t}{(1+r)^t} - P_s \sum_{t=T}^{T+D} \frac{Q^t}{(1+r)^t} \right) \cdot \text{Pr ob(Ganar Licitación)} \mid \text{tipo}_i \right\} \Leftrightarrow$$

$$\text{Max} \left\{ (P_{cn} - P_s) \cdot \text{Pr ob(Ganar Licitación)} \mid \text{tipo}_i \right\}$$

Donde³⁷:

P_s = Precio anual equivalente spot en el periodo D

P_{cn} = Precio anual equivalente de contrato en el periodo D

En conclusión, los generadores oferentes en una subasta buscan maximizar el margen existente entre el precio spot (anual equivalente) y el precio (anual equivalente) a pactar en el contrato licitado³⁸, ponderado por la función de probabilidad que describe la posibilidad de ganar la subasta en función de la oferta realizada. Dado que la función objetivo es derivada desde una comparación basada en dos escenarios: con y sin contrato,

³⁶ La presente tesis estudia el comportamiento estratégico de los individuos participantes de una subasta. Elementos del campo financiero no son considerados en este desarrollo. Así, observaciones acerca de la volatilidad de la cartera están fuera de este análisis.

³⁷ Esta tesis no explora elementos del ámbito financiero, por lo que la tasa r es la misma para el cálculo de ambas anualidades. En otras palabras, los agentes son neutros al riesgo.

³⁸ Esta conclusión se refleja informalmente en el mercado mediante frases de expertos como por ejemplo: "...costo marginal más cinco mills..." (refiriéndose al precio objetivo de negociación de un contrato bilateral)

el evento definido como *perder la subasta* está asociado a un pago nulo, el cual desaparece de la maximización³⁹.

IV.2. Valoración Común del Contrato

Como se concluyó en el punto anterior, cada individuo desea maximizar su pago esperado, el cual equivale a maximizar el margen existente entre el precio spot y el precio a pactar en el contrato licitado. La primera observación al respecto es que para realizar esta maximización es necesario conocer el valor del contrato o precio spot. Una segunda observación es que dicho valor no es conocido por ningún agente con certeza, y además es común a todos ellos. Es decir, cada generador desea ofertar en la subasta en base a lo que él cree acerca del valor real que tendrá el precio spot. Además, dado que todos los generadores pueden estimar el precio spot con la misma habilidad, dichas estimaciones serán sensibles o dependientes a otras estimaciones realizadas por otros competidores, ya que todas buscan estimar la misma *valoración común del contrato*⁴⁰.

Para modelar la valoración común, se utilizarán dos variables auxiliares, las cuales pueden ser interpretadas, económicamente, como la información pública acerca de la valoración del bien (variable aleatoria V) y la información privada (variable aleatoria X_i). Mientras la variable aleatoria V se define como el valor del precio spot (anual equivalente), que se refleja mediante una distribución de probabilidad fabricada en base a valores históricos o en base a simulaciones futuras del mercado realizadas con información pública. La variable aleatoria X_i representa el valor de la estimación privada del precio spot (anual equivalente) utilizando información propia de cada empresa.

³⁹ Los individuos maximizan pago esperado condicional a su información (bayes), el cual se puede definir informalmente como: $E\{\text{Pago}\} = \text{PagoConContrato} * P(\text{GanarLicitacion}) + \text{PagoSinContrato} * P(\text{PerderLicitacion})$. Donde: $\text{PagoSinContrato} = 0$.

⁴⁰ Es el concepto detrás de la frase "...Beliefs about beliefs, and so on...". Funderberg, D y Tirole, J (1991) *Game Theory* Cap. 6

Wilson (1969)⁴¹ propone que la variable aleatoria X_i debe tener una distribución de probabilidad condicional a V que refleje el error residual de la estimación privada de cada agente. Así, si se considera que cada generador comete un error ξ en la estimación del valor, entonces se tiene que:

$$F_{X_i|V}(x | v) \sim U((1 - \xi) \times v, (1 + \xi) \times v)$$

Se ha escogido la función de probabilidad uniforme con tal de modelar que la estimación tiene un riesgo equiprobable de errar dentro del intervalo definido. Se asume que dado $V = v$, las variables de estimación X_i distribuyen independientemente.

Así, integrando todos los antecedentes anteriormente descritos, se puede deducir que la valoración del bien para el individuo se puede escribir como:

$$Va_i(x_i) = E\{V | X_i = x_i\}$$

Donde:

$Va_i(x_i)$ = Valor del precio spot (anual equivalente) para el individuo i en función de su estimación privada.

$E\{V | X_i = x_i\}$ = Esperanza del valor del precio spot condicional a la estimación privada.

Considerando la simetría del problema, es fácil deducir que la función $Va_i(\cdot)$ es la misma para todos los oferentes, por lo que se puede escribir sin ninguna falta de generalidad, la igualdad $Va_i(\cdot) = Va(\cdot)$.

Finalmente, se destaca el hecho que la utilización de dos variables auxiliares (V , X_i) para representa la valoración del precio spot (Va) de cada individuo permite que las *creencias* de éstos estén altamente correlacionadas, reflejando de mejor manera un

⁴¹ Para modelar subastas de valor común existen básicamente dos enfoques: Uno clásico propuesto por Wilson y uno más moderno, pero menos documentado propuesto por Riley. Más información en los siguientes documentos: Wilson, R (1969) *Competitive Bidding with Disparate Information*. Bikhchandani, S and Riley, J. (1991) *Equilibria in Open Common Value Auction*

mercado real donde las estimaciones de cada agente acerca del valor común son fuertemente dependientes entre sí.

IV.2.1. Cálculo de la Función Valoración

Hasta el momento se tienen los siguientes antecedentes del modelo:

- Oferentes buscan $\text{Max} \{(P_{cn} - P_s) \cdot \text{Prob}(\text{Ganar Licitación}) \mid \text{tipo}_i\}$
- Existencia de la variable aleatoria V que representa el valor real del precio spot (anual equivalente) del mercado futuro.
- Existencia de la variable aleatoria X_i que representa la estimación o señal privada acerca del valor del precio spot (anual equivalente) del mercado futuro.
- Se conocen las funciones de probabilidad $F_v(v)$ y $F_{X_i|V}(x_i|v)$ con las cuales distribuye las variables V y X_i respectivamente.

Con éstos antecedentes se debe calcular la función $Va(\cdot)$, que representa la valoración del precio spot (anual equivalente) en función de la señal privada de cada individuo. Dado que $Va(\cdot)$ representa una esperanza se pueden establecer las siguientes igualdades:

$$Va(x_i) = E\{V \mid X_i = x_i\} = \int_{D_{V|X}} v \times f_{V|X_i}(v \mid x_i) dv$$

Donde:

$f_{V|X_i}(\cdot \mid \cdot)$ = Densidad de probabilidad de V condicional a X_i

$D_{V|X}$ = Todo el dominio donde $f_{V|X_i}(\cdot \mid \cdot)$ es no nula.

A pesar que no se cuenta directamente con la densidad de probabilidad condicional $f_{V|X_i}(\cdot \mid \cdot)$, ésta se puede obtener de la información disponible mediante la regla de Bayes:

$$f_{V|X_i}(v \mid x_i) = \frac{f_{X_i|V}(x_i \mid v) \times f_V(v)}{f_{X_i}(x_i)}$$

Donde:

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{D_{X,V}} f_{X_i,V}(x_i, v) dv = \int_{D_{X,V}} f_{X_i|V}(x_i | v) \times f_V(v) dv$$

$D_{X,V}$ = Todo el dominio donde la conjunta $f_{X_i,V}(\cdot|\cdot)$ es no nula.

Con todo el análisis descrito hasta el momento es posible resolver los 3 problemas ideales enunciados al inicio de este capítulo.

IV.3. Primer Problema Idealizado

Con el material analizado a lo largo del desarrollo del presente trabajo, es posible explorar una metodología de solución para el siguiente problema:

Un distribuidor en el mercado eléctrico chileno licita un contrato por el abastecimiento de su demanda, el cual entra en vigencia en T años más y tiene una duración de D años. El distribuidor decide utilizar un mecanismo de licitación de sobre cerrado de primer precio por todo el bloque de demanda, es decir, un mecanismo donde se adjudique la licitación el generador que oferte el menor precio de venta, y en el cual el contrato sea negociado al precio ofertado por dicho generador.

Con el fin de encontrar el equilibrio del juego enunciado, a continuación se introducirán algunas definiciones, las que se suman a las previamente enunciadas.

En los mecanismos de subasta estudiados en el presente trabajo, el ganador es aquel que presenta la menor de las ofertas a la subasta, es decir, son mecanismos de subasta estándares⁴². Considerando este hecho, una subasta se puede considerar como un juego en donde la oferta de cada individuo compite con la menor del resto de las ofertas. Así, es pertinente definir la variable aleatoria Y_i como la señal o estimación de menor valor entre todo el resto (excepto i) de los individuos, es decir:

$$Y_i = \text{Min} \{X_{-i}\}$$

Dado que se ha definido el set de variables X_i con distribución independientes condicional a V , entonces la distribución de Y_i condicional a V se puede escribir como:

$$f_{Y_i|V}(y_i | v) = (N - 1) \times f_{X_i|V}(y_i | v) \times (1 - F_{X_i|V}(y_i | v))^{N-2}$$

Donde:

N = Número de oferentes en la licitación.

Además, se define la variable b_i como la oferta que presenta el agente i en la subasta. Junto con la definición anterior, se introduce la variable B_i , la cual representa la menor oferta presentada a la subasta por el resto de los agentes, es decir:

$$B_i = \text{Min}\{b_{-i}\}$$

Nótese que la variable anterior es de gran utilidad, ya que permite describir matemáticamente el evento: el individuo i se adjudica la subasta, mediante:

$$b_i \leq B_i \Leftrightarrow \{\text{El participante } i \text{ se adjudica la subasta}\}$$

Así, cada individuo i de la subasta busca resolver:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \{(P_{cn} - P_s) \bullet \text{Pr ob}(\text{Ganar Licitación}) \mid \text{tipo}_i\} \Leftrightarrow \\ \text{Max}_{b_i} \quad & \{(b_i - Va(x_i)) \bullet \text{Pr ob}(B_i \geq b_i) \mid x_i\} \end{aligned}$$

Si se considera que todos los individuos $-i$ se comportan según una función de estrategia tal que:

$$b_{-i} = \beta(x_{-i})$$

Donde $\beta(\cdot)$ es monótonamente creciente⁴³, entonces:

⁴² Krishna, V. (2002) *Auction Theory* Cap. 3

⁴³ Supuesto lógico, la estrategia debe permitir a los individuos ofertar precios más altos cuando la señal o estimación del precio spot es mayor. Recordar que si $\beta(\cdot)$ es creciente, entonces $\beta^{-1}(\cdot)$ también lo es.

$$\text{Max}_{b_i} \{(b_i - Va(x_i)) \cdot \text{Pr ob}(B_i \geq b_i) | x_i\} \Leftrightarrow \text{Max}_{b_i} \{(b_i - Va(x_i)) \cdot \text{Pr ob}(Y_i \geq \beta^{-1}(b_i) | x_i)\}$$

Escribiendo formalmente la expresión anterior quedaría:

$$\text{Max}_{b_i} \left\{ \Pi_i = \int_{\beta^{-1}(b_i)}^{W_{Y|X}^S} (b_i - Va(x_i)) \times f_{Y_i|X_i}(y_i | x_i) dy_i \right\}$$

Donde:

$W_{Y|X}^S$ = Límite superior del intervalo del dominio de la densidad de probabilidad condicional $f_{Y_i|X_i}(\cdot | \cdot)$

De esta manera, la oferta óptima a realizar por el individuo i en la subasta se encuentra determinada por la condición de primer orden del problema anterior, la cual se puede deducir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial b_i} = 0 \Rightarrow$$

$$0 = (Va(x_i) - b_i) \times f_{Y_i|X_i}(\beta^{-1}(b_i) | x_i) \times \frac{\partial \beta^{-1}(b_i)}{\partial b_i} + (-1) \times \int_{W_{Y|X}^S}^{\beta^{-1}(b_i)} f_{Y_i|X_i}(y_i | x_i) dy_i$$

Si se considera un equilibrio en estrategias simétricas, es decir $\beta^{-1}(b_i) = x_i$, entonces:

$$0 = (Va(x_i) - \beta(x_i)) \times f_{Y_i|X_i}(x_i | x_i) + (1 - F_{Y_i|X_i}(x_i | x_i)) \frac{\partial \beta(x_i)}{\partial x_i}$$

De este modo, se obtiene una ecuación diferencial cuyo conjunto de soluciones incluye la función estrategia. La condición anterior definiría completamente la función $\beta(\cdot)$ si se contara una condición de borde. Por otro lado, dicha condición se puede determinar

mediante el *precio de reserva*⁴⁴ impuesto por el gobierno a la licitación. Si se considera que las ofertas realizadas en la licitación por cada individuo deben estar por sobre sus valoraciones y bajo el precio de reserva, entonces existe un caso límite en el cual:

$$Va(X_i^0) = \beta(X_i^0) = Pr$$

Donde:

P_r = Precio de reserva de la licitación

A continuación, la Figura 4- 1 ilustra la situación anteriormente descrita:

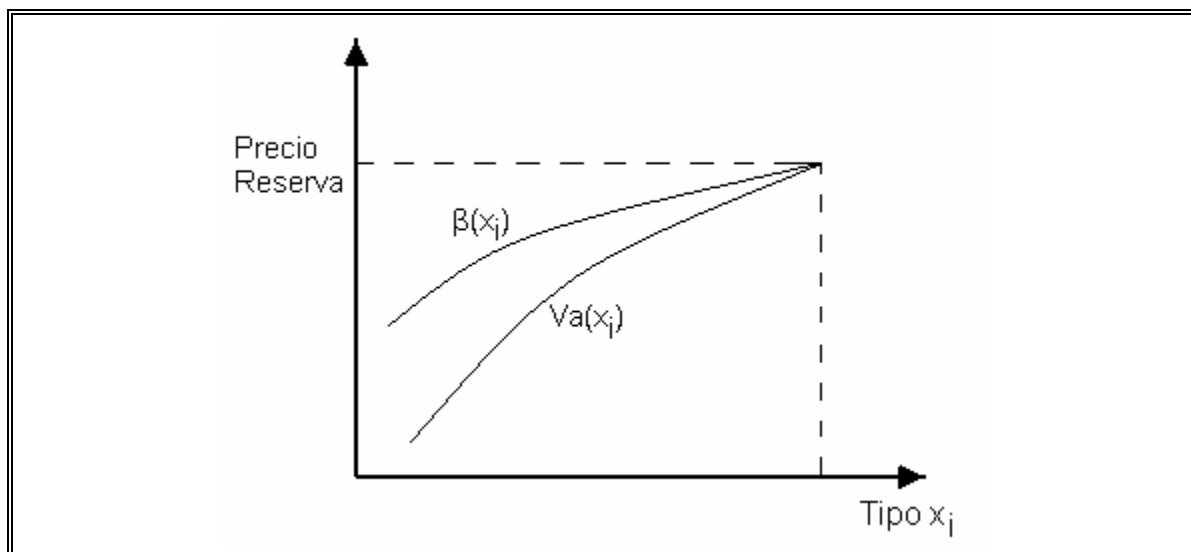


Figura 4- 1: Formas de la solución $\beta(\cdot)$ derivadas de la condición de primer orden

Finalmente, la estrategia de cada generador en la licitación se puede derivar de:

⁴⁴ El precio de reserva es un precio techo que limita las ofertas realizadas en la subasta, éste permite que la subasta no despeje precios excesivamente altos.

$$0 = (Va(x_i) - \beta(x_i)) \times f_{Y_i|X_i}(x_i | x_i) + (1 - F_{Y_i|X_i}(x_i | x_i)) \frac{\partial \beta(x_i)}{\partial x_i}$$

con condición de borde $\beta(Va^{-1}(\text{Pr})) = \text{Pr}$

Siendo:

$$f_{Y_i|X_i}(y_i | x_i) = \frac{f_{X_i Y_i}(x_i, y_i)}{f_{X_i}(x_i)} = \frac{\int_{Dv} f_{X_i Y_i V}(x_i, y_i, v) dv}{\iint_{Dy Dv} f_{X_i Y_i V}(x_i, y_i, v) dv dy_i}$$

$$\text{con } f_{X_i Y_i V}(x_i, y_i, v) = f_{X_i|V}(x_i, v) \times f_{Y_i|V}(y_i, v) \times f_V(v)$$

Una vez descrito el comportamiento de los individuos mediante la función $\beta(\cdot)$, es posible deducir el equilibrio de mercado mediante el pago que realizará la distribuidora al ganador de la licitación. Así, dado que el distribuidor firmará un contrato de abastecimiento con el ganador de la licitación a su precio ofertado, se puede expresar el pago esperado como:

$$C_D = E\{Z^I\} \quad \text{donde} \quad Z^I = \begin{cases} \text{Min}\{\beta(x_i)\} & \text{si } \text{Min}\{\beta(x_i)\} \leq \text{Pr} \\ \text{Cr} & \text{si } \text{Min}\{\beta(x_i)\} > \text{Pr} \end{cases}$$

Donde:

C_D = Costo del distribuidor

Cr = Costo del distribuidor asociado a licitación desierta

Cabe mencionar que, si bien un precio de reserva bajo permite que la licitación despeje precios bajos, éste también puede provocar que la licitación se declare desierta, lo que conlleva a costos adicionales (Cr), esto insinúa que existe un precio de reserva óptimo, que permita minimizar C_D .

Si bien, el regulador ha definido el precio de reserva mediante un algoritmo que permite modificarlo cuando una licitación resulta desierta, no se analizará este hecho, ya que el estudio de la presente tesis se enfoca al análisis de eventos simultáneos y no al análisis de una sucesión de eventos.

Finalmente, para efectos de cálculo de la modelación analizada en este documento, se ha considerado un valor de Cr arbitrariamente alto. Si bien no existe una estimación adecuada de este valor, ésta debiera reflejar la incomodidad que significaría tener una distribuidora la cual no cumple con los requerimientos legales de tener toda su demanda, al menos para los próximos 3 años, contratada⁴⁵.

IV.4. Segundo Problema Idealizado

El segundo problema enunciado al inicio de éste capítulo es muy similar al primero, con la diferencia que la casación de la licitación se realiza mediante un mecanismo de segundo precio. Así, el enunciado del problema se puede presentar de la siguiente manera:

Un distribuidor en el mercado eléctrico chileno licita un contrato por el abastecimiento de su demanda, el cual entra en vigencia en T años más y tiene una duración de D años. El distribuidor decide utilizar un mecanismo de licitación de sobre cerrado de segundo precio por todo el bloque de demanda, es decir, un mecanismo donde se adjudique la licitación al generador que oferte el menor precio de venta, y en el cual el contrato sea negociado al precio ofertado por la segunda oferta más económica.

En este caso, como la remuneración del adjudicador de la subasta estará referida a la segunda oferta más económica, la maximización a realizar por cada individuo es:

$$\text{Max}_{b_i} \{ \Pi_i = \int_{\beta^{-1}(b_i)}^{w_{Y|X}^S} (\beta(y_i) - Va(x_i)) \times f_{Y_i|X_i}(y_i | x_i) dy_i \}$$

⁴⁵ El hecho que la distribuidora no tenga contratos de abastecimiento no significa que no será abastecida, por este motivo no se ha considerado el valor del costo de falla.

Al derivar la condición de primer orden se obtiene que:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial b_i} = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 = -(\beta(\beta^{-1}(b_i)) - Va(x_i)) \times f_{Y_i|X_i}(\beta^{-1}(b_i) | x_i) \times \frac{\partial \beta^{-1}(b_i)}{\partial b_i}$$

Si se considera que $\beta^{-1}(\cdot)$ es estrictamente creciente tal que su derivada no se anule en el dominio $D_{Y|X}$, y además $\beta^{-1}(b_i) = x_i$, entonces:

$$\beta(x_i) = Va(x_i)$$

La expresión anterior muestra que la subasta de segundo precio incita a cada generador a revelar su valoración a través de su oferta. Así, este resultado es coherente con la literatura técnica al respecto⁴⁶.

Otro hecho que reafirma la validez del modelo derivado, es que bajo este esquema de subasta el precio de reserva no interviene en el comportamiento de los oferentes⁴⁷, dado que los generadores no especulan acerca de las ofertas del resto y sólo se preocupan de su propia valoración.

Una vez descrito el comportamiento de los individuos, es posible deducir el equilibrio de mercado mediante el pago que realizará la distribuidora al ganador de la licitación. Así, dado que el distribuidor firmará un contrato de abastecimiento con el ganador de la licitación al precio ofertado por la segunda oferta más económica, se puede expresar el pago esperado como:

⁴⁶ Para mayor detalle ver punto II.2.2

⁴⁷ Krishna, V (2002) *Auction Theory* Cap 2

$$C_D = E\{Z^{II}\} \quad \text{donde} \quad Z^{II} = \begin{cases} \text{SegMin}\{\beta(x_i)\} & \text{si } \text{SegMin}\{\beta(x_i)\} \leq \text{Pr} \\ \text{Pr} & \text{si } \text{SegMin}\{\beta(x_i)\} > \text{Pr} \wedge \text{Min}\{\beta(x_i)\} \leq \text{Pr} \\ \text{Cr} & \text{si } \text{Min}\{\beta(x_i)\} > \text{Pr} \end{cases}$$

Donde:

$\text{SegMin}\{A\}$ = Segundo mínimo del set de valores A

Si bien, el precio de reserva no interfiere en la estrategia de los oferentes, éste sí afecta el costo esperado por parte de la distribuidora. Al igual que en el caso anterior, se puede deducir que existe un precio de reserva óptimo, el cual permite minimizar C_D .

IV.5. Tercer Problema Idealizado

El tercer problema se diferencia de los dos anteriores debido a que se trata de un mecanismo de licitación multi-producto. Al inicio de éste capítulo el problema fue enunciado como:

Dos distribuidores del mercado eléctrico chileno se coordinan y licitan un gran bloque de demanda. Las condiciones de los contratos son entrada en operación en T años más y duración de D años cada uno. Los distribuidores deciden utilizar un mecanismo de licitación de sobre cerrado pay-as-bid aceptando ofertas parciales por la mitad del bloque.

En este esquema de licitación, cada individuo realiza un set de dos ofertas, las cuales compiten con todo el resto de las ofertas, dichas ofertas no son pertenecientes a ninguno de los dos bloques, sino que cualquiera de ellas puede adjudicarse tanto el primer como el segundo bloque⁴⁸. Para el siguiente desarrollo matemático, se considerará que cada generador oferta un vector $\mathbf{b}_i = (b^1_i, b^2_i)$ donde $b^1_i \leq b^2_i$, el cual compite con un vector de ofertas residuales $\mathbf{B}_i = (B^1_i, B^2_i, \dots, B_i^{2N-2})$ donde $B_i^j \leq B_i^{j+1}$ que representa las ofertas del resto de los individuos ordenadas de menor a mayor. Con las definiciones anteriores se puede escribir la utilidad esperada condicional de cada oferente como:

⁴⁸ Para mayor detalle ver punto II.2.1.1

$$((b_i^1 - Va(x_i)) + (b_i^2 - Va(x_i))) \bullet \text{Pr ob(Adjudicarse 2 Bloques)} + \dots \\ ((b_i^1 - Va(x_i)) \bullet \text{Pr ob(Adjudicarse sólo 1 Bloque)} \quad | \quad x_i$$

Si se define:

$$H_i^1(\mu | x_i) = \text{Pr ob}(B_i^1 \leq \mu | X_i = x_i) \quad y \\ H_i^2(\mu | x_i) = \text{Pr ob}(B_i^2 \leq \mu | X_i = x_i)$$

Entonces se puede escribir formalmente el problema de optimización de cada individuo como:

$$\text{Max}_{b_i^1, b_i^2} \{ (b_i^1 + b_i^2 - 2Va(x_i)) \times \int_{b_2}^{W_{B^1|X}} h_i^1(\mu | x_i) d\mu + \dots \\ ((b_i^1 - Va(x_i)) \times (\int_{b_1}^{W_{B^2|X}} h_i^2(\mu | x_i) d\mu - \int_{b_2}^{W_{B^1|X}} h_i^1(\mu | x_i) d\mu) \} \\ \text{s.a.} \\ b_i^1 \leq b_i^2$$

La pregunta lógica que resalta tras ver la formulación anterior es: ¿Los individuos tienen incentivo a realizar ofertas distintas por cada bloque? Note que si cada individuo presenta un set de ofertas iguales, éste estaría considerando activa la única restricción del problema, lo que revela que este óptimo es a lo más tan bueno como el del problema original.

Para responder la pregunta recientemente enunciada, se plantea la minimización equivalente y las posteriores condiciones de KKT. Así, las condiciones de primer orden se pueden derivar desde:

$$\ell = (b_i^1 - Va(x_i)) \int_{W_{B^2|X}}^{b_i^1} h_i^2(\mu | x_i) d\mu + (b_i^2 - Va(x_i)) \int_{W_{B^1|X}}^{b_i^2} h_i^1(\mu | x_i) d\mu + \lambda(b_i^1 - b_i^2)$$

o i)

$$\frac{\partial \ell}{\partial b_i^1} \geq 0 \Leftrightarrow \int_{W_{B^2|X}}^{b_i^1} h_i^2(\mu | x_i) d\mu + (b_i^1 - Va(x_i)) \times h_i^2(b_i^1 | x_i) + \lambda \geq 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial b_i^2} \geq 0 \Leftrightarrow \int_{W_{B^1|X}}^{b_i^2} h_i^1(\mu | x_i) d\mu + (b_i^2 - Va(x_i)) \times h_i^1(b_i^2 | x_i) - \lambda \geq 0$$

o ii)

$$b_i^1 \times \frac{\partial \ell}{\partial b_i^1} = 0 \Leftrightarrow b_i^1 \times \left(\int_{W_{B^2|X}}^{b_i^1} h_i^2(\mu | x_i) d\mu + (b_i^1 - Va(x_i)) \times h_i^2(b_i^1 | x_i) + \lambda \right) = 0$$

$$b_i^2 \times \frac{\partial \ell}{\partial b_i^2} = 0 \Leftrightarrow b_i^2 \times \left(\int_{W_{B^1|X}}^{b_i^2} h_i^1(\mu | x_i) d\mu + (b_i^2 - Va(x_i)) \times h_i^1(b_i^2 | x_i) - \lambda \right) = 0$$

o iii)

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} \leq 0 \Leftrightarrow b_i^1 - b_i^2 \leq 0$$

o iv)

$$\lambda \times \frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda \times (b_i^1 - b_i^2) = 0$$

o v)

$$b_i^1, b_i^2, \lambda \geq 0$$

En el estudio de la derivación de la condición de primer orden se descartan los casos en que b_i^1 ó b_i^2 son igual a cero, por lo tanto el problema se reduce a examinar sólo dos casos: $\lambda = 0$ ó $\lambda > 0$.

- $\lambda = 0$

Si el lambda es nulo, la condición ii) de KKT muestra que las soluciones b_i^1 y b_i^2 se pueden derivar de un sistema desacoplado, donde:

$$\int_{W_{B^2|X}}^{b_i^1} h_i^2(\mu | x_i) d\mu + (b_i^1 - Va(x_i)) \times h_i^2(b_i^1 | x_i) = 0$$

$$\int_{W_{B^1|X}}^{b_i^2} h_i^1(\mu | x_i) d\mu + (b_i^2 - Va(x_i)) \times h_i^1(b_i^2 | x_i) = 0$$

Éste se puede expresar en términos de las funciones de probabilidad acumuladas como:

$$b_i^1 - Va(x_i) = \frac{1 - H_i^2(b_i^1 | x_i)}{h_i^2(b_i^1 | x_i)}$$

$$b_i^2 - Va(x_i) = \frac{1 - H_i^1(b_i^2 | x_i)}{h_i^1(b_i^2 | x_i)}$$

Dado que H_i^j representa la distribución de probabilidad de las ofertas correspondientes al bloque j, se tiene que H_i^2 domina estocasticamente (en primer orden) a H_i^1 , es decir:

$$H_i^2(\mu | x_i) \leq H_i^1(\mu | x_i) \quad \forall \mu$$

Por lo tanto, se puede suponer que H_i^2 domina estocasticamente a H_i^1 en terminos de la *razón de Hazard*⁴⁹, es decir:

⁴⁹ Este supuesto es bastante utilizado en la teoría de subastas, ya que la dominancia en términos de la razón de Hazard implica dominancia de primer orden. Mayor detalle en Anexo N° 2

$$\frac{h_i^2(\mu | x_i)}{1 - H_i^2(\mu | x_i)} \leq \frac{h_i^1(\mu | x_i)}{1 - H_i^1(\mu | x_i)} \quad \forall \mu \Leftrightarrow$$

$$r_i^2(\mu | x_i) = \frac{1 - H_i^2(\mu | x_i)}{h_i^2(\mu | x_i)} \geq \frac{1 - H_i^1(\mu | x_i)}{h_i^1(\mu | x_i)} = r_i^1(\mu | x_i) \quad \forall \mu$$

Además, si los $r_i^j(\mu | x_i)$ son decrecientes en μ , entonces se obtendrá como solución del sistema desacoplado, apuestas tales que: $b_i^1 \geq b_i^2$. La solución del sistema de ecuaciones desacoplado se ilustra en la Figura 4- 2:

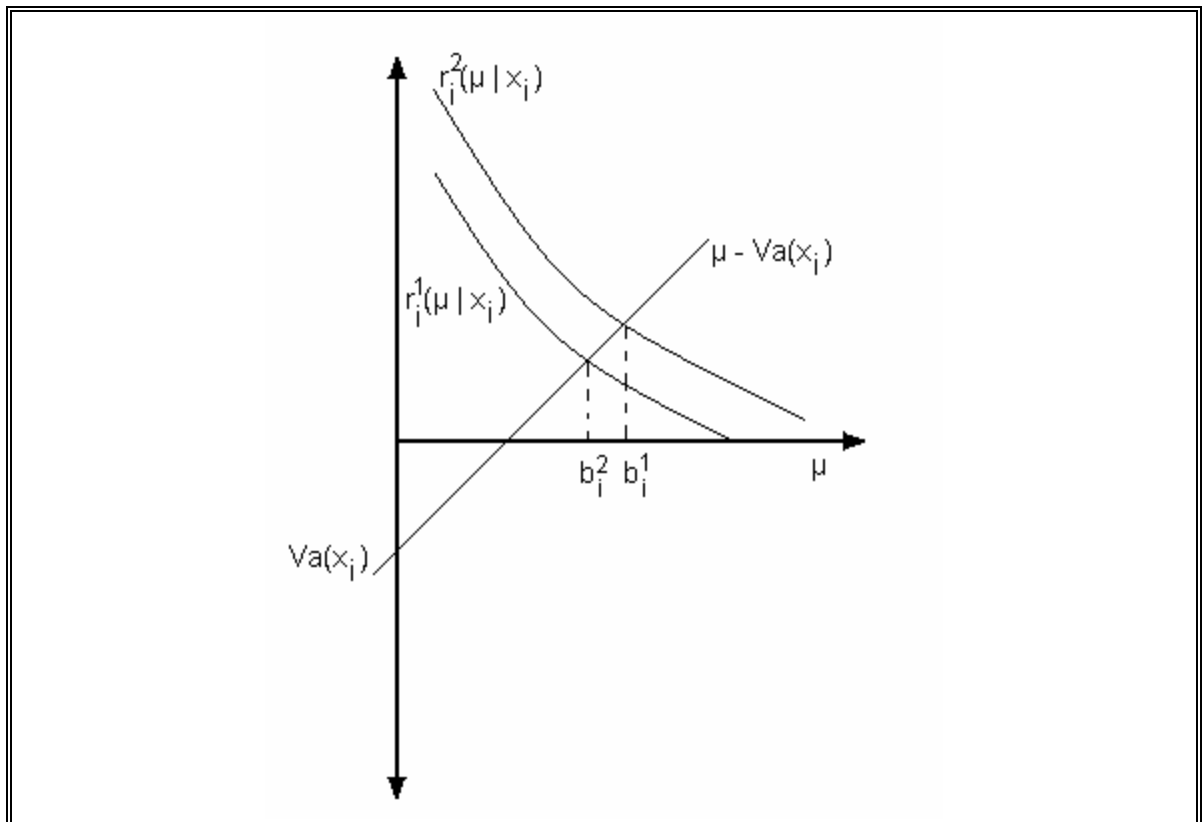


Figura 4- 2: Solución al problema de optimización que resuelve cada individuo en una subasta multi-producto pay-as-bid

Tal como se puede apreciar, dicha solución no cumple con la condición iii) de KKT, por lo cual no es válida.

○ $\lambda \neq 0$

Si λ es distinto de cero, de la condición iv) de KKT se deduce que la solución al problema es tal que $b_i^1 = b_i^2$. Por lo que el problema se torna en una decisión de *todo o nada*. Por otro lado, esta solución es totalmente válida, ya que corresponde a la solución del problema idealizado N° 1, ya que cada oferente realizará un par de ofertas planas por ambos bloques, lo que en la práctica se traduce a que se realiza una sola oferta por el gran bloque. La conclusión recién presentada es coherente con la literatura económica, la cual explica que teóricamente en éste tipo de subastas los oferentes están incentivados a realizar ofertas planas⁵⁰. Sin embargo, la evidencia empírica ha demostrado que los oferentes realizan ofertas tales que $b_i^1 \leq b_i^2$. No obstante, algunos expertos explican que esto se produce debido a la aversión al riesgo de los oferentes⁵¹, fenómeno que no está siendo estudiado en la presente tesis⁵². En los capítulos siguientes se presenta un análisis cualitativo, el cual incluye algunas consideraciones financieras.

Finalmente, se ha demostrado que bajo los supuestos enunciados a lo largo de este punto, los generadores realizarán ofertas de igual precio por ambos sub-bloques. Por lo tanto, existe una equivalencia entre este modelo y el de una licitación por todo el bloque indivisible bajo un esquema de primer precio. Todo esto, bajo un escenario en el cual todos los generadores pueden abastecer todo el bloque subastado.

IV.6. Implementación Computacional

La implementación computacional, tanto del primer problema como la del segundo, se basan principalmente en la utilización de dominios discretizados donde se utilizan

⁵⁰ Krishna, V (2002) *Auction Theory* Cap 13

⁵¹ Wolfram, C (1999) *Should the Rest of the World Adopt the United Kingdom's reforms?*

métodos sencillos de cálculo numérico para computar cada una de las expresiones presentadas en los puntos anteriores. Respecto al tercer problema, éste se analiza directamente en el Capítulo V, ya que no es necesario efectuar una simulación computacional dado que se realizó una demostración algebraica al respecto. Los resultados de los algoritmos y métodos computacionales descritos en este capítulo se presentan posteriormente en el siguiente capítulo.

A continuación, se muestra la metodología utilizada para encontrar el comportamiento de los individuos y el equilibrio en cada uno de los problemas presentados anteriormente.

IV.7. Primer Problema Idealizado

El algoritmo de solución del primer problema se puede describir en tres pasos, los cuales son:

- Cálculo de la función $Va(x_i)$
- Cálculo de la función $\beta(x_i)$
- Cálculo del equilibrio de mercado

IV.7.1. Cálculo de la función $Va(x_i)$

Para la modelación matemática de los problemas se utiliza un dominio común para todas las funciones en \mathbb{R}^3 , el cual está acotado por el dominio del set de variables aleatorias X, Y, V . Cada función de probabilidad, u otra función cualquiera, realiza una operación que se puede representar como: $f(x,y,v): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$.

Donde:

x = Describe el dominio de la variable aleatoria X_i

y = Describe el dominio de la variable aleatoria Y_i

v = Describe el dominio de la variable aleatoria V

⁵² Temas del ámbito financiero no son relevantes para el desarrollo de esta tesis, ya que se desea estudiar

Así, toda función se puede representar punto a punto en un tensor⁵³ $T_{f(x,y,v)}$, el cual representa el valor $f(x_{[i]}, y_{[j]}, z_{[k]})$ en el elemento (i,j,k) . En la Figura 4- 3 se ilustra como la función $f(x)=x^2$ se puede almacenar en un tensor punto a punto en el dominio definido.

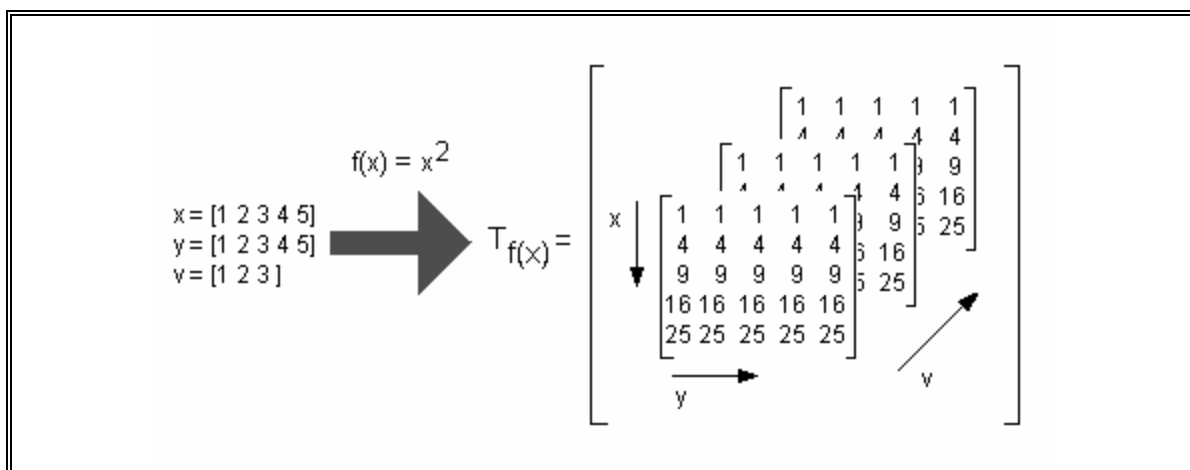


Figura 4- 3: Ejemplo de discretización de funciones

Con la representación anterior, es factible trabajar punto a punto y poder procesar las funciones de probabilidad necesarias para computar el equilibrio bayesiano.

Así, la función $Va(\cdot)$ se puede calcular punto a punto como:

$$Va[i, \cdot, \cdot] = \sum_{k \in D_k} T_V[i, \cdot, k] \times T_{f_{V|X}}[i, \cdot, k] \Delta v \quad \forall i$$

Donde⁵⁴:

T_V = Discretización de la función $f(x, y, v) = v$

$T_{f_{V|X}}$ = Discretización de la densidad de probabilidad $f_{V|X}$

comportamientos estratégicos de los individuos.

⁵³ Tensor se utiliza como sinónimo de *tensor de rango # 3*

⁵⁴ La nomenclatura $T [i, j, \cdot]$ denota la referencia al elemento (i,j,k) del tensor para cualquier valor de k . Ésta se utiliza cuando los valores referentes a una dimensión del tensor son irrelevantes o iguales.

Por otro lado, utilizando esta misma técnica de discretización, la función de probabilidad $f_{V|X}$ se puede calcular mediante la regla de Bayes, utilizando las mismas expresiones presentadas en el punto IV.2.1.

IV.7.2. Cálculo de la función $\beta(x_i)$

En el punto IV.3 se derivó la condición de primer orden que permite despejar la función $\beta(\cdot)$, la cual se describió como:

$$0 = (Va(x_i) - \beta(x_i)) \times f_{Y_i|X_i}(x_i | x_i) + (1 - F_{Y_i|X_i}(x_i | x_i)) \frac{\partial \beta(x_i)}{\partial x_i}$$

$$\text{con condición de borde } \beta(Va^{-1}(\text{Pr})) = \text{Pr}$$

Como es posible apreciar, la ecuación diferencial es lineal de primer orden y en una variable, por lo que se puede utilizar para su resolución una técnica sencilla de diferencia finita como la que se describe a continuación⁵⁵:

$$\beta[i-1] = \beta[i] + \frac{\Delta x}{F_1[i]} (F_2[i] \times \beta[i] + F_3[i])$$

$$\text{con condición de borde } \beta[i_r] = Va[i_r], \text{ en la cual } Va[i_r] = \text{Pr}$$

Donde:

$$F_1[i] = \text{Vector que representa: } 1 - T_{F_{Y|X}}[i, i, \cdot]$$

$$F_2[i] = \text{Vector que representa: } -T_{f_{Y|X}}[i, i, \cdot]$$

$$F_3[i] = \text{Vector que representa: } T_{f_{Y|X}}[i, i, \cdot] \times Va[i]$$

⁵⁵ Método de Euler.

$Va[i] =$ Vector que representa: $Va[i, \cdot, \cdot]$

IV.7.3. Cálculo del Equilibrio de Mercado

El equilibrio de mercado se resume como el pago que finalmente realizan las distribuidoras a las generadoras. Dicho pago se puede sintetizar en el precio al cual los agentes negocian la compra-venta de energía. En el punto IV.3 se describió este precio (anual equivalente) como:

$$C_D = E\{Z^I\} \quad \text{donde} \quad Z^I = \begin{cases} \text{Min}\{\beta(x_i)\} & \text{si } \text{Min}\{\beta(x_i)\} \leq \text{Pr} \\ \text{Cr} & \text{si } \text{Min}\{\beta(x_i)\} > \text{Pr} \end{cases}$$

La expresión anterior es posible calcularla mediante la heurística de Monte Carlo, cuyo diagrama de flujo se describe a continuación:

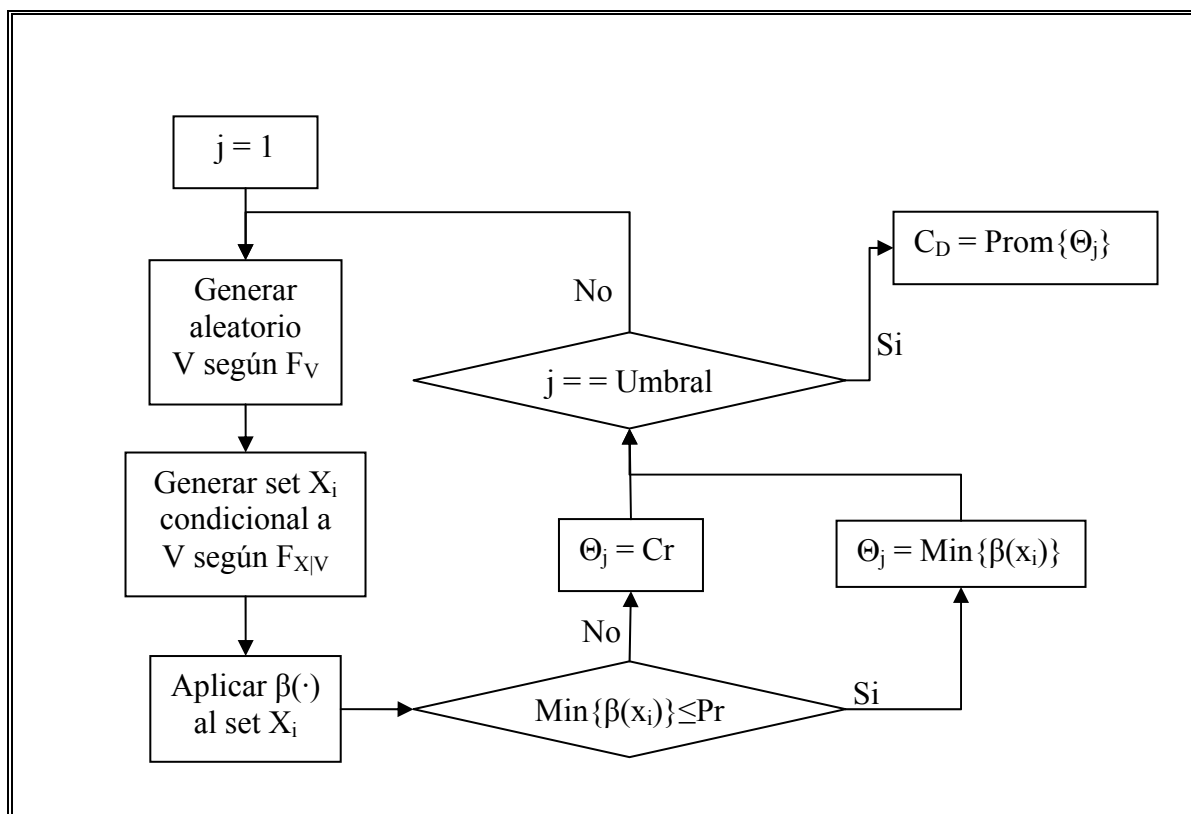


Figura 4- 4: Cálculo del precio de equilibrio mediante Monte Carlo

Es pertinente mencionar que el Umbral especificado en el diagrama de flujo es ajustado a un valor suficientemente alto de manera que se produzca una convergencia en el valor de C_D .

IV.8. Segundo Problema Idealizado

Al igual que el primer problema, el algoritmo de solución del segundo problema se puede describir en tres pasos, los cuales son:

- Cálculo de la función $Va(x_i)$
- Cálculo de la función $\beta(x_i)$
- Cálculo del equilibrio de mercado

La función de valoración $Va(\cdot)$, es la misma que en el caso del problema 1, ya que ésta tiene que ver con las creencias o expectativas de cada individuo acerca del precio spot (anual equivalente) futuro, y no con el mecanismo de licitación utilizado por la distribuidora. Así, el presente problema difiere del anterior en cuanto a la estrategia de los individuos y al equilibrio de mercado.

IV.8.1. Cálculo de la función $\beta(x_i)$

En el punto IV.4 se derivó la condición de primer orden que permite despejar la función $\beta(\cdot)$, la cual se describió como:

$$\beta(x_i) = Va(x_i)$$

Es decir, los generadores se benefician de la estrategia de ofertar su valoración. Dada la simpleza de la condición de primer orden, el vector estrategia se puede expresar simplemente como:

$$\beta[i] = Va[i]$$

IV.8.2. Cálculo del Equilibrio de Mercado

Tal como se mencionó anteriormente, el equilibrio de mercado se puede representar mediante el costo o precio que la distribuidora deberá pagar por el abastecimiento de la energía. En el punto IV.4 se describió este precio (anual equivalente) como:

$$C_D = E\{Z^{II}\} \quad \text{donde} \quad Z^{II} = \begin{cases} \text{SegMin}\{\beta(x_i)\} & \text{si } \text{SegMin}\{\beta(x_i)\} \leq \text{Pr} \\ \text{Pr} & \text{si } \text{SegMin}\{\beta(x_i)\} > \text{Pr} \wedge \text{Min}\{\beta(x_i)\} \leq \text{Pr} \\ \text{Cr} & \text{si } \text{Min}\{\beta(x_i)\} > \text{Pr} \end{cases}$$

La expresión anterior es posible calcularla mediante la heurística de Monte Carlo, cuyo diagrama de flujo se describe a continuación:

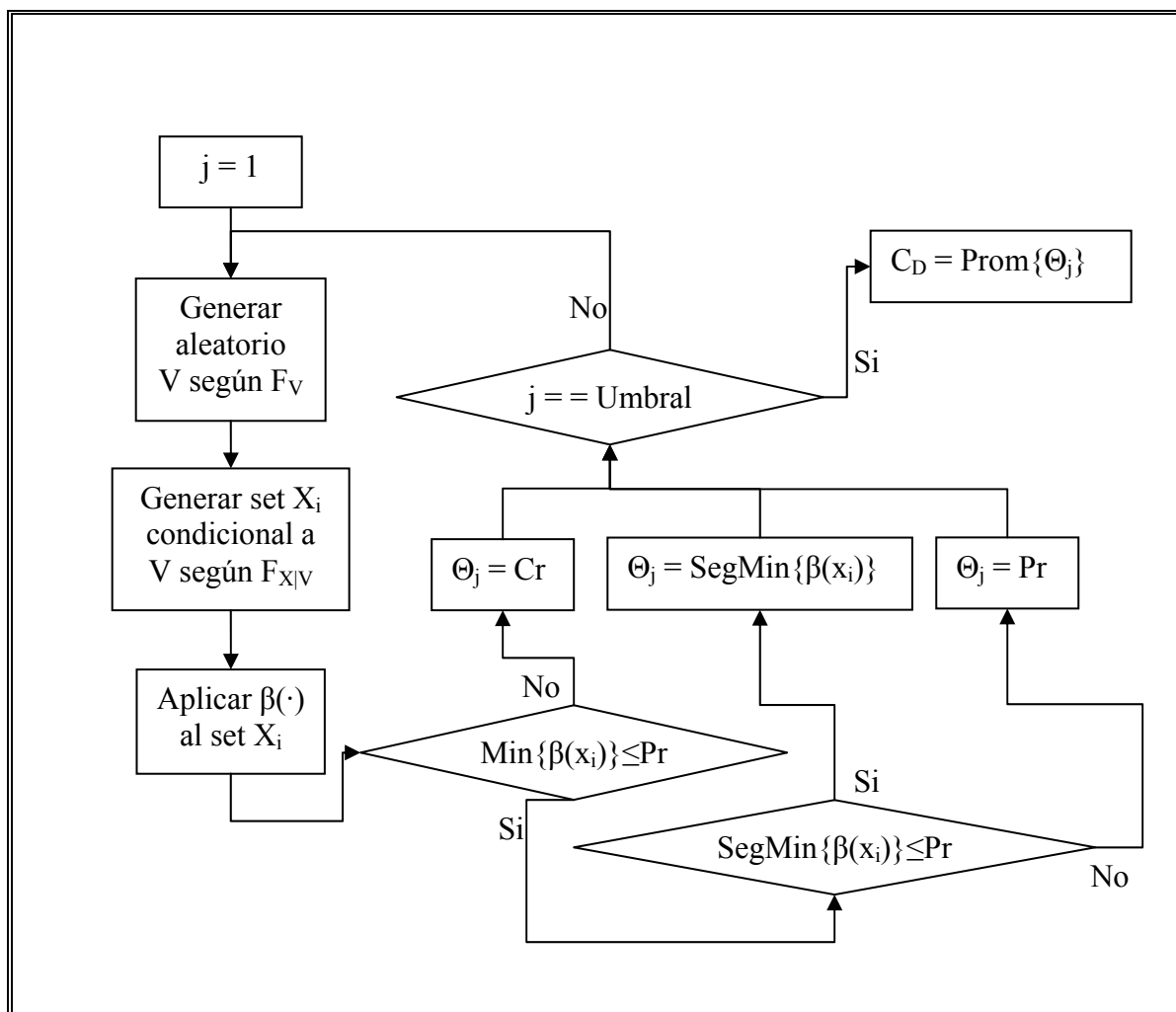


Figura 4- 5: Cálculo del precio de equilibrio mediante Monte Carlo

Al igual que en el punto IV.7.3, el Umbral especificado en la Figura 4- 5 es ajustado a un valor suficientemente alto de manera que se produzca una convergencia en el valor de C_D .

IV.9. Mecánica de la Modelación: Licitación de Primer Precio

A continuación se presenta una breve descripción acerca de cómo operan los distintos modelos matemáticos en la subasta de primer precio. Para esto, se describen pequeños ejemplos ilustrativos que permiten una mejor comprensión de los fenómenos y supuestos económicos presentados en esta tesis.

IV.9.1. Función de Valoración

En las secciones anteriores se definió la función de valoración como:

$$Va_i(x_i) = E\{V | X_i = x_i\}$$

$$\text{con } F_{X|V}(x | v) \sim U((1 - \xi) \times v, (1 + \xi) \times v)$$

Donde la variable V se puede entender como la valoración pública del precio spot y la variable X_i se puede entender como una estimación del precio spot basada en información puramente privada. Como se puede apreciar de la expresión anterior, la mejor estimación acerca del valor del precio spot (Va), está dada por una expresión que considera tanto la información pública, como la privada. Al analizar con más detalle la expresión anterior, se puede observar que para valores de ξ cercanos a cero, la mejor estimación del precio spot de cada generador se basará casi completamente en información privada. Por el contrario, si ξ es cercano a uno, entonces la mejor estimación acerca del precio spot se basará casi completamente en información pública. A continuación la Figura 4- 6 ilustra esta situación para un caso particular donde $V \sim N(60,5)$.

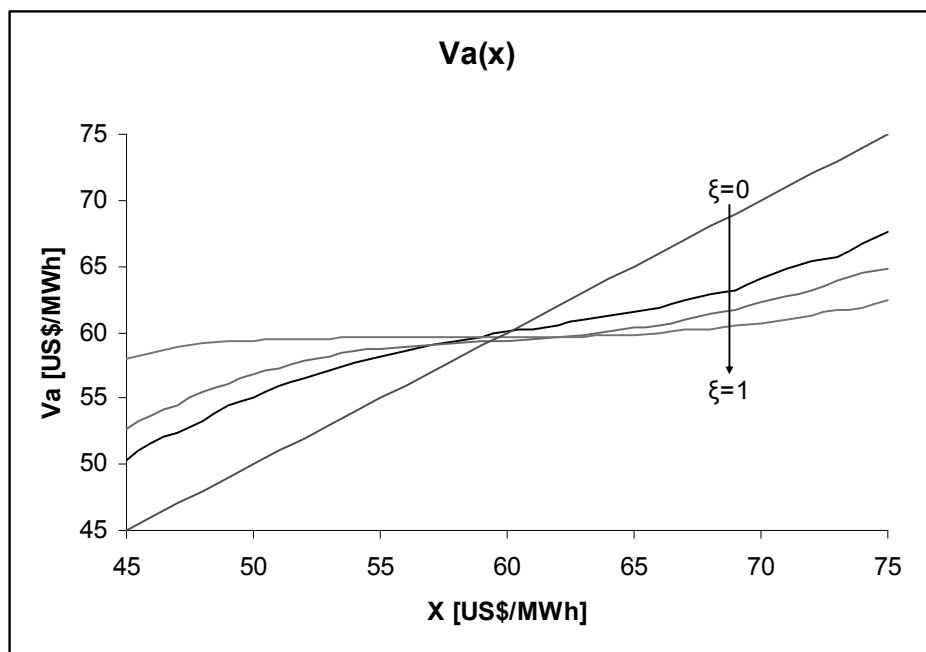


Figura 4- 6: Mejor estimación del precio spot constante equivalente para distintos valores de ξ

Por lo tanto, se puede concluir que la variable ξ pondera la cantidad de información pública y privada que se incorpora en la estimación definitiva del precio spot que realiza cada generador.

IV.9.2. Estrategia de Oferta

La estrategia de oferta de cada jugador está diseñada de manera que si el generador decide subir en un peso su oferta respecto a la cantidad óptima, entonces la probabilidad de perder la subasta crece de tal manera que el aumento de un peso en el margen no logra compensar el aumento en la probabilidad de perder la subasta, esto finalmente produce una disminución en la utilidad esperada. En la Figura 4- 7 se puede apreciar dicha afirmación.

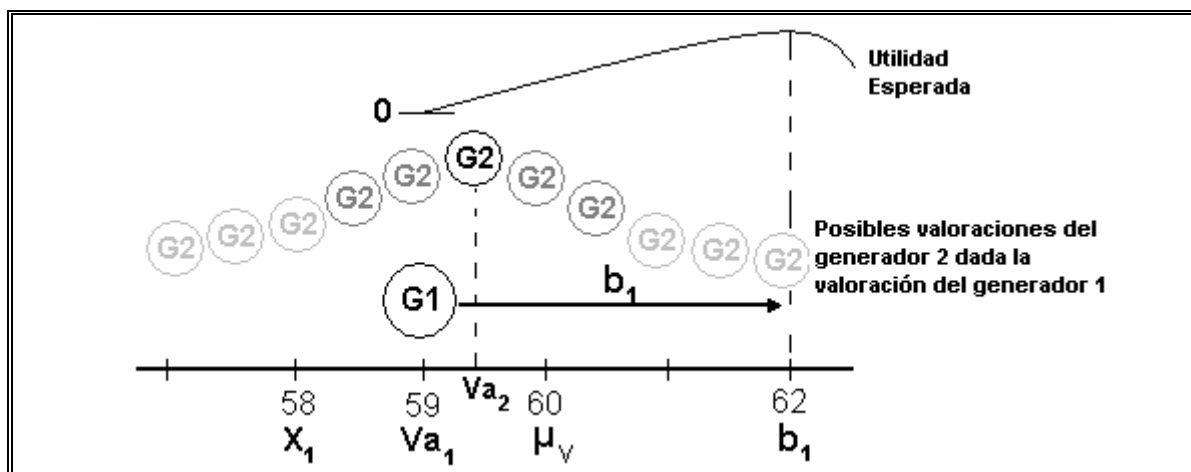


Figura 4- 7: Estrategia de oferta de un generador con un competidor

En la Figura 4- 7 se puede apreciar la mecánica de la estrategia de oferta. El generador uno conoce su propia mejor valoración del precio spot (59), la cual es obtenida en base de la información pública (V) y en base de su información privada (58). Dado que no conoce la estimación del precio spot del contrincante, el generador 1 debe estimar el conjunto de posibilidades acerca de la estimación del precio spot del contrincante. Por construcción, las variables X_i están fuertemente afiliadas, lo cual se puede observar en la Figura 4- 7. La variable X_1 condiciona distribución de la variable X_2 , y en consecuencia de $Va_2 = Va(x_2)$. Finalmente, la oferta óptima a realizar por el generador 1 es aquella que maximiza su utilidad esperada, es decir el margen de ganancia por la probabilidad de ganar la licitación.

Al agregar un jugador más al mismo juego de subasta, el generador 1 realiza una oferta más agresiva, tal como se puede apreciar en la Figura 4- 8.

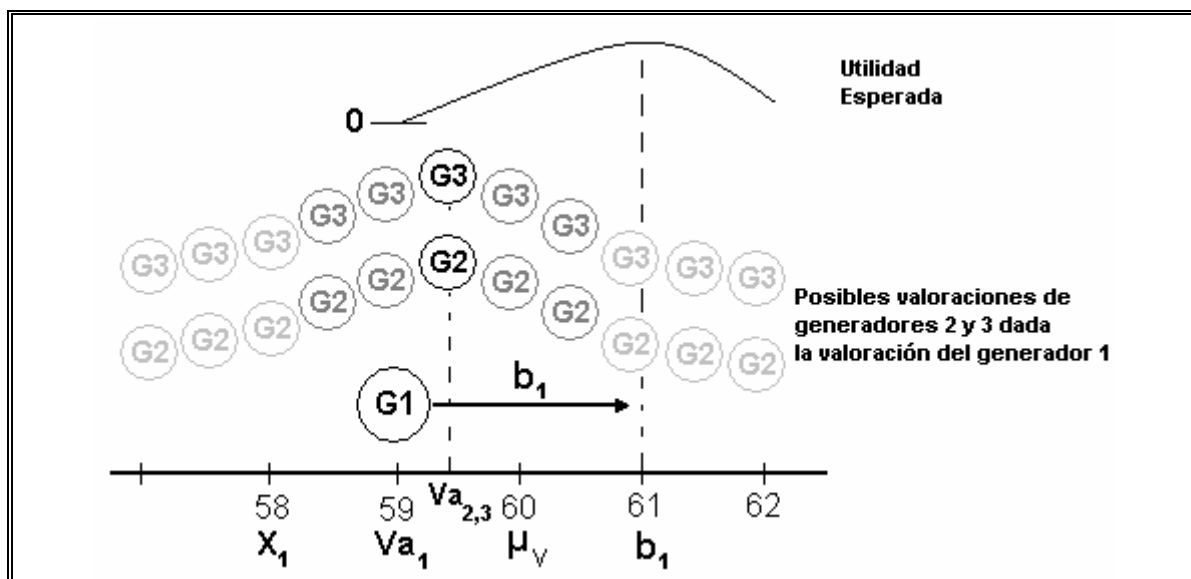


Figura 4- 8: Estrategia de oferta de un generador con dos competidores

La contracción en la cantidad ofertada por el generador 1 es producida debido a que la probabilidad de ganar la licitación se ve alterada. Esto, ya que el generador 1 debe realizar una oferta menor a cada una de las ofertas de los generadores 2 y 3 si desea adjudicarse la licitación. En la Figura 4- 8 nuevamente se observa una afiliación entre las variables X_1 , X_2 y X_3 claramente distribuyen de la misma manera dado el valor de X_1 .

En conclusión, cada generador tiene una función de mejor valoración del precio spot constante equivalente en función de dos componentes: una pública y otra privada. El juego se realiza dentro de un marco simétrico, por lo que todos los generadores utilizan con la misma habilidad y de igual manera la información pública y privada. Por esto, dada la valoración de uno de los generadores, se asume que el resto de los generadores presenta estimaciones dentro del mismo rango en el cual se encuentra la valoración del generador conocido. Esto último es lógico, pues si todos los generadores tienen las mismas habilidades para determinar el precio spot, es válido asumir que éstos tendrán estimaciones “similares” del mismo. Finalmente, los generadores realizan una oferta que maximiza el producto del margen potencial de ganancia por la probabilidad de ganar. Al aumentar una

oferta siempre se está disminuyendo la probabilidad de ganar, por lo tanto la oferta óptima es tal que la ganancia marginal no es capaz de compensar el aumento de probabilidad de perder la licitación.

V. DESCRIPCIÓN DE RESULTADOS Y ESTUDIO DEL MODELO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE UN EJEMPLO: EL CASO CHILENO

En el presente capítulo se realiza un análisis a los modelos matemáticos derivados en el capítulo anterior. Dicho análisis se efectuará en base al estudio de un caso, sobre el cual se realizarán distintas sensibilidades que permitan describir tanto el comportamiento del modelo, como el del mercado en estudio. Con este fin, primero se exhibe la serie de reglas que rigen el mercado en cuestión, junto con una breve descripción general de éste. En éste marco se ejecutarán las simulaciones pertinentes, las que luego son analizadas y sensibilizadas. Finalmente, se incluye un pequeño análisis cualitativo, basado tanto en los resultados obtenidos como en evidencia teórica y empírica extraída de la literatura técnica.

V.1. Breve Descripción del Marco Regulatorio

El conjunto de reglas que condiciona la realización de las licitaciones en el mercado eléctrico nacional, están fijadas por la Ley N° 20.018 y por la Resolución Exenta N° 611.

Básicamente, este conjunto de reglas establece que:

- Ley N° 20.018
 - Las distribuidoras deben disponer del suministro de energía de a lo menos los próximos 3 años.
 - El suministro debe provenir de contratos obtenidos mediante licitaciones o generación propia.
 - Las licitaciones deben ser públicas, abiertas, no discriminatorias y transparentes.
 - Las distribuidoras pueden coordinarse de manera de realizar una licitación conjunta por su demanda agregada.
 - Las distribuidoras deben elaborar las Bases de licitación en función de un contenido mínimo especificado en la Resolución Exenta N° 611.

- Los plazos de vigencia de los contratos negociados en las licitaciones no deben ser mayores a 15 años.
- El precio de la energía presentado por el oferente en la licitación no puede ser superior a un umbral calculado en base al precio nudo vigente (precio de reserva).
- Para los contratos negociados mediante una licitación el precio de la potencia no se actualizará en cada cálculo de precio nudo, sino que se indexará según una fórmula previamente establecida.
- La licitación se adjudica a la oferta de menor precio.
- Resolución Exenta N° 611
 - La licitación debe tener un formato de sobre cerrado.
 - Cada distribuidora debe licitar dos tipos de contrato: para suministro de base y para suministro de crecimiento.
 - Cada oferta debe contener: una oferta administrativa y una oferta económica.
 - Las distribuidoras pueden dividir su bloque de demanda en sub-bloques de igual magnitud con el fin de aceptar ofertas parciales de suministro.
 - La indexación de precios de energía debe ser propuesta por el generador en su oferta.
 - Las actividades correspondientes al proceso de licitación se deben ajustar a una estructura específica de etapas estandarizadas según el cronograma elaborado por la autoridad.

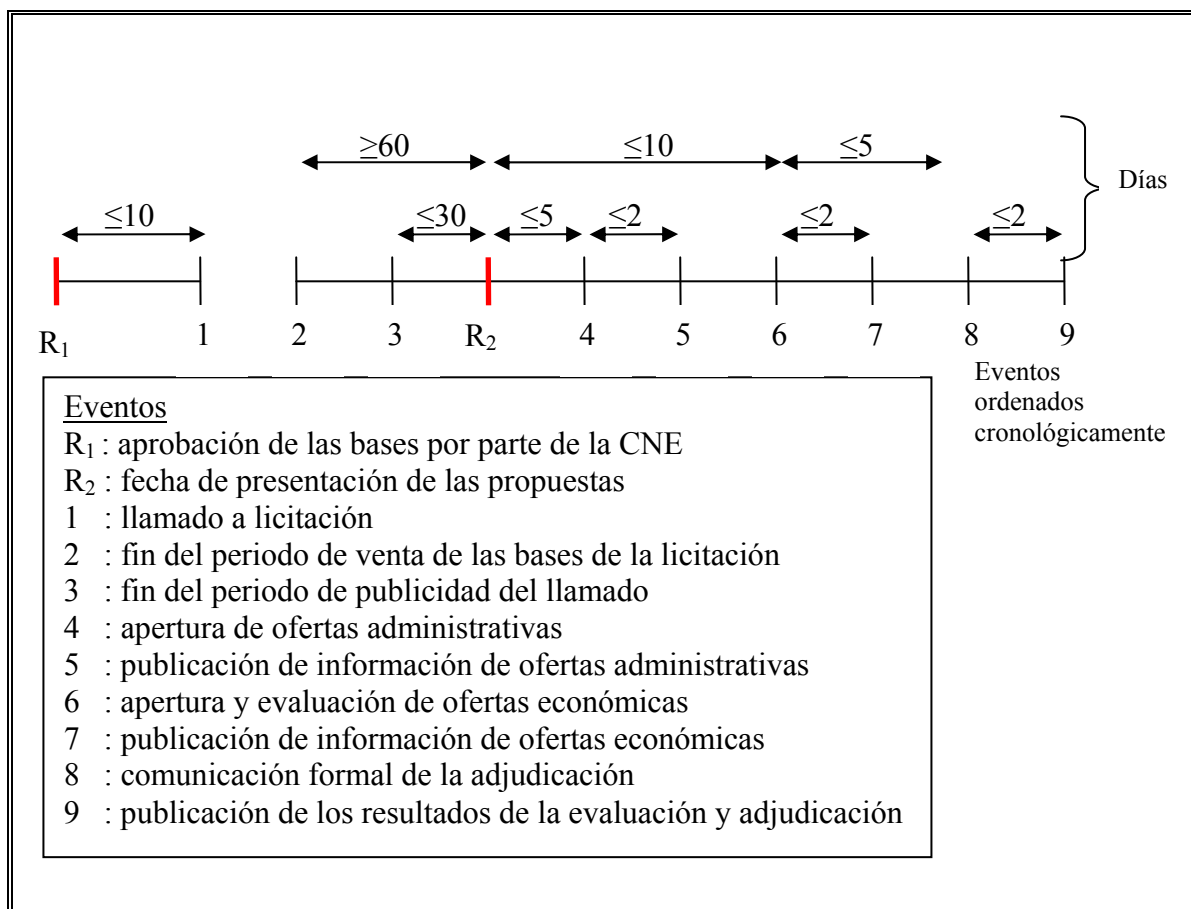


Figura 5- 1: Cronograma de licitaciones según la Resolución Exenta N° 611

Así, las distribuidoras deben organizar procesos de licitación acordes a las reglas presentadas anteriormente. Por lo tanto, las simulaciones de los juegos modelados en este trabajo deben considerar dichas reglas con el fin de obtener resultados representativos del mercado eléctrico chileno.

Del conjunto de reglas expuestas, existe un subconjunto que condiciona especialmente la modelación, debido a que influyen directamente en el diseño del mecanismo de licitación. Dicho subconjunto de reglas incluye:

- Existencia de un precio de reserva.

- Licitación con casación del tipo estándar⁵⁶.
- Licitación con formato de sobre cerrado.

Si bien, el resto de las reglas son importantes, no es necesario incluirlas directamente en la modelación.

Esta regulación es válida para todo Chile, por lo tanto para cada uno de los sistemas interconectados del país. En las modelaciones realizadas en esta tesis ha sido escogido el Sistema Interconectado Central (SIC), dado la relevancia de este y el porcentaje de clientes regulados que posee. A continuación se presenta una breve descripción del sistema en el cual se realizarán las simulaciones: el SIC.

V.2. El Sistema Interconectado Central

Chile posee cuatro sistemas interconectados de los cuales el más relevante en términos de cantidad de energía consumida es el Sistema Interconectado Central. La Tabla V- 1 muestra la estadística de energía demanda para cada uno de los cuatro sistemas, desagregada tanto a nivel de clientes regulados como libres.

Tabla V- 1: Ventas de energía año 2004

Sistema	Venta a Clientes		Total Ventas [GWh]	Cobertura Poblacional	
	Regulados [GWh]	Industriales [GWh]		Población	%
SING	1.076,1	10.164,2	11.240,3	902.423	5,66%
SIC	23.514,6	11.087,8	34.602,4	14.790.632	92,70%
AYSÉN	81,5	0,0	81,5	100.37	0,62%
MAGALLANES	146,9	32,9	179,8	162.206	1,02%
<i>Total Nacional</i>	<i>24.819,1</i>	<i>21.284,9</i>	<i>46.104,0</i>	<i>15.955.631</i>	<i>100,00%</i>

En la tabla anterior se aprecia la relevancia del SIC frente al resto de los sistemas, tanto en el volumen total de energía transada como en el volumen de energía destinada a abastecer demanda proveniente de clientes regulados.

⁵⁶ Se entiende por subasta estándar en la cual el adjudicatario es el que realiza la oferta más económica.

El SIC está constituido por centrales generadoras, y por los sistemas de transmisión y distribución que operan en forma interconectada desde Taltal hasta la isla grande de Chiloe, de norte a sur respectivamente. En la Tabla V- 1 se puede apreciar que el SIC abarca el territorio nacional donde habita el 93% de la población, siendo el más extenso de todos.

El mercado de la generación en el SIC está conformado por numerosas empresas, las cuales están en manos de unos pocos grupos económicos. Si bien a nivel de empresas la concentración de mercado es moderada, la situación cambia cuando se analizan los holdings propietarios de dichas empresas, ya que éstos son básicamente tres. Este hecho torna el mercado chileno de la generación en un mercado altamente concentrado⁵⁷. A continuación, la Tabla V- 2 muestra la participación de mercado según la capacidad instalada de cada empresa.

Tabla V- 2: Participación de mercado de generación en el SIC año 2004

	Potencia en MW			%
	Termoeléctricas	Hidroeléctricas	Totales	
Arauco Generación S.A.	152,8	0,0	152,8	1,9%
AES Gener S.A.	536,5	244,9	781,4	9,9%
Colbún S.A.	868,4	697,0	1.565,4	19,9%
Endesa	469,0	2.097,7	2.566,7	32,6%
Guacolda S.A.	304,0	0,0	304,0	3,9%
Pangue S.A.	0,0	467,0	467,0	5,9%
Pehuenche S.A.	0,0	623,0	623,0	7,9%
Soc. Eléctrica Santiago S.A.	379,0	0,0	379,0	4,8%
San Isidro S.A.	370,0	0,0	370,0	4,7%
Ibener S.A.	0,0	124,0	124,0	1,6%
Cenelca S.A.	0,0	145,0	145,0	1,8%
Otras	92,4	296,7	389,1	4,9%
Totales	3.172,1	4.695,3	7.867,4	100,0%

En la tabla anterior se aprecia que sólo una empresa (Endesa) posee más del 20% de la capacidad instalada. Sin embargo, y tal como se mencionó anteriormente, este

⁵⁷ Villar, J. (2002) *Simulador de un Mercado Hidrotérmico Utilizando Teoría de Juegos*, Cap. 6

panorama cambia rotundamente si se analiza la participación a nivel de holding. La Figura 5- 2 y Figura 5- 3 muestran las participaciones de mercado tanto a nivel de empresas como a nivel de holding.

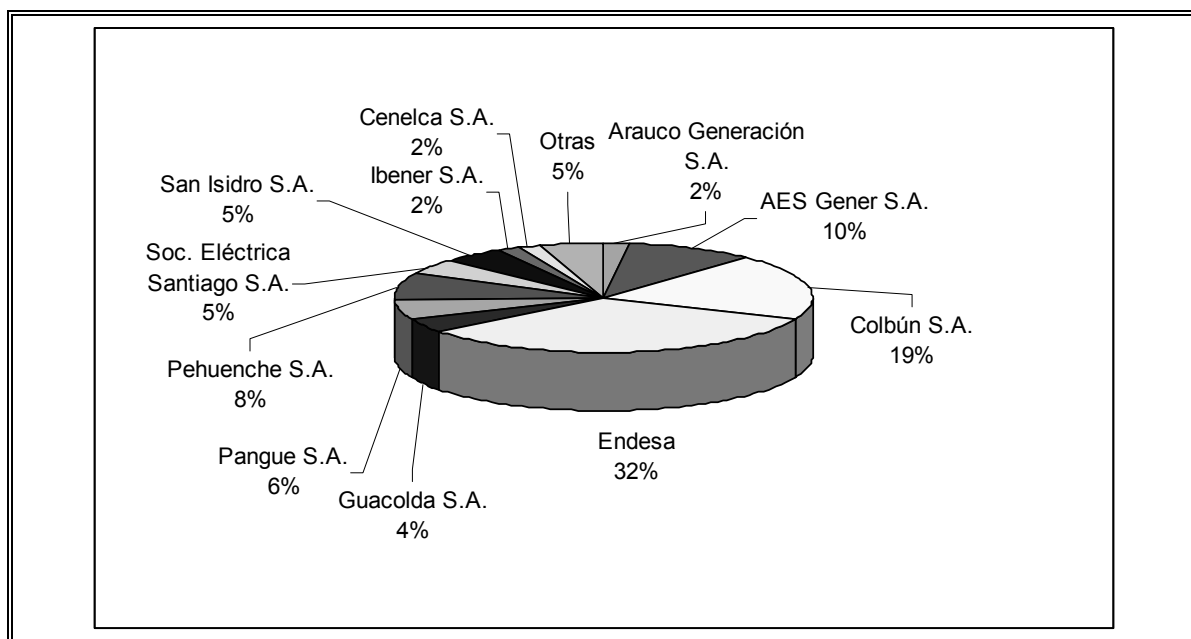


Figura 5- 2: Participación de mercado de generación en el SIC por empresa

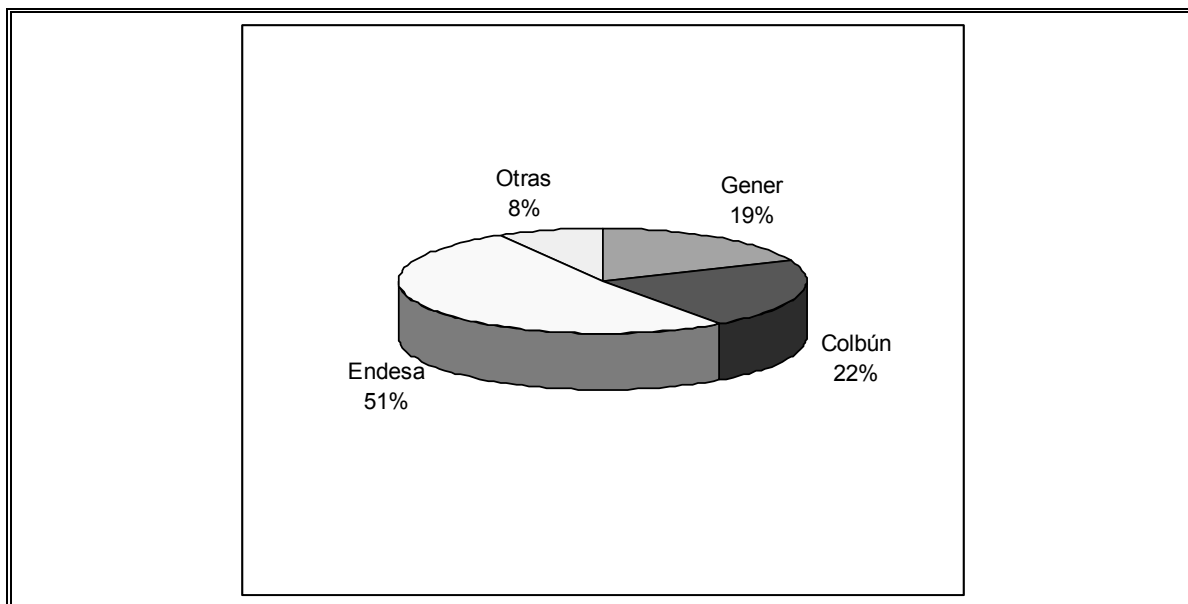


Figura 5- 3: Participación de mercado de generación en el SIC por holding⁵⁸

Así, el mercado de generación en Chile está en manos de unos pocos grupos económicos, siendo el más relevante el grupo Enersis, controlador de Endesa, con una participación del 51% en el mercado de la generación.

Dada la situación descrita anteriormente, las simulaciones de los modelos se realizarán bajo dos escenarios: En el primero los generadores actúan como empresas independientes, y en el segundo las empresas pertenecientes al mismo holding actúan en forma coludida.

V.3. Comportamiento de los Agentes de Mercado y Equilibrio en una Licitación de Sobre Cerrado de Primer Precio por un Bloque Indivisible

Para estudiar el modelo presentado en el punto IV.3 se supone una situación real⁵⁹, en la cual un distribuidor virtual perteneciente al SIC oferta su bloque de energía en una subasta de sobre cerrado de primer precio.

⁵⁸ Es posible que en la participación del rótulo *otras* exista generación perteneciente a uno de los tres holding.

La empresa distribuidora virtual considerada para el ejemplo, compra energía en el nodo Cerro Navia 220, y ésta es responsable exactamente de un cuarto de la demanda total en dicho punto de compra. La Figura 5- 1 ilustra la ubicación de la distribuidora virtual considerada para el análisis dentro del sistema interconectado. Esta distribuidora virtual no corresponde a la distribuidora real Chilectra, sino que a una de menor tamaño.

⁵⁹ El calificativo *real* quiere decir que los datos serán tomados de la estadística y proyección de la operación real del sistema. Sin embargo, la compañía distribuidora será una empresa que no existe en el sistema, la cual se considerara conectada a un nodo real de éste.

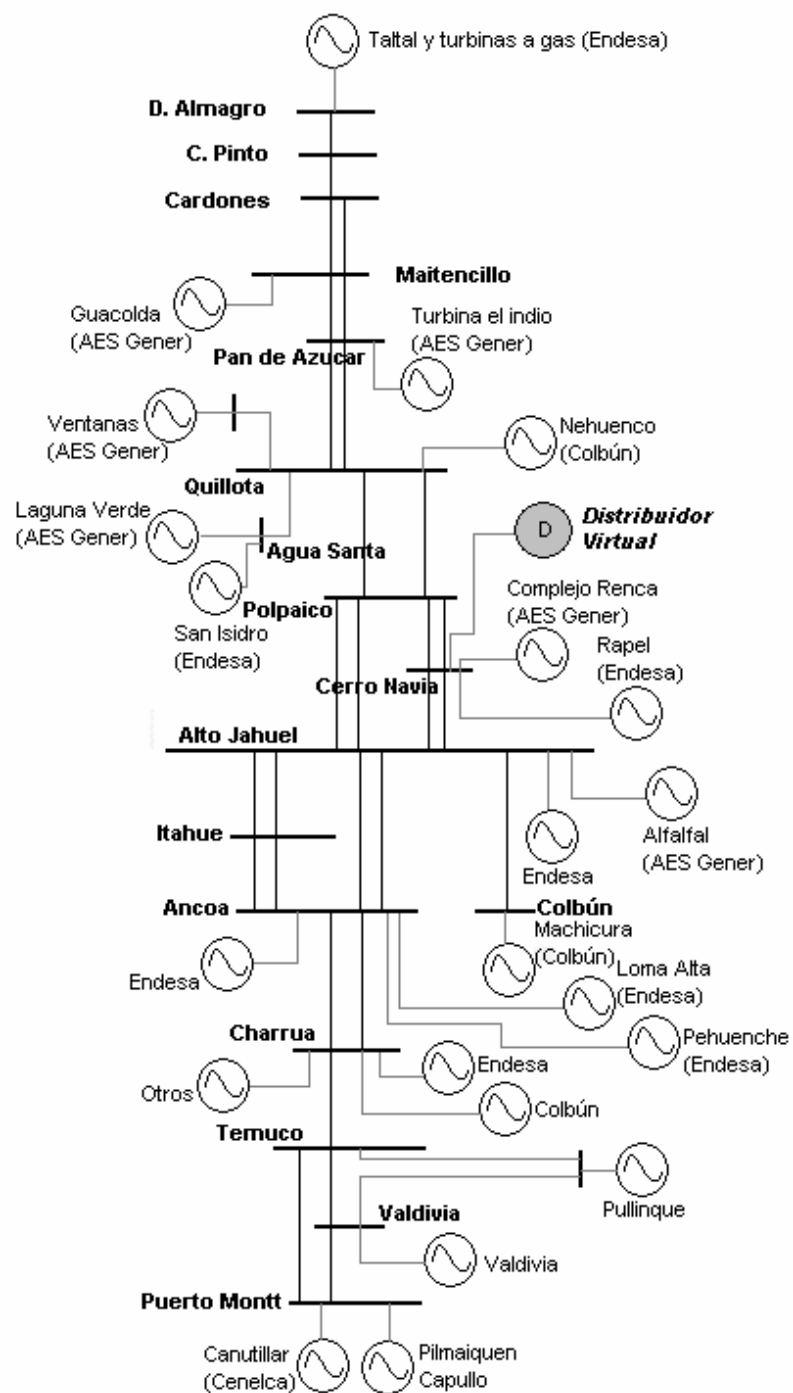


Figura 5- 4: Troncal SIC

Para cumplir con la legislación actual, esta distribuidora convoca a una licitación en diciembre del presente año (2005) por su abastecimiento futuro entre los años 2007 y 2015, ambos inclusive. Las cantidades requeridas para los 108 meses (desde enero-2007 hasta diciembre-2015) contenidos en el periodo de vigencia del contrato se muestran en la Figura 5- 5. Como se mencionó anteriormente ésta corresponde a un cuarto de la demanda proyectada para el nodo Cerro Navia 220⁶⁰. Se asume que la licitación llama a presentar ofertas por toda la demanda.

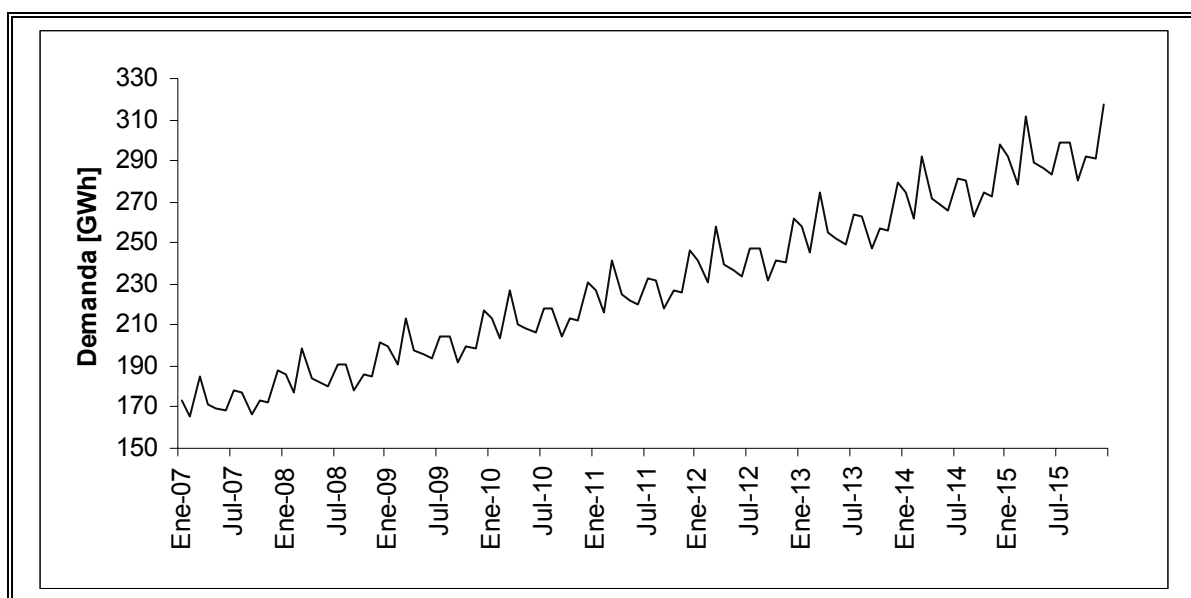


Figura 5- 5: Previsión de demanda de la distribuidora virtual

Por otro lado, la estimación de la evolución esperada del costo marginal⁶⁰ para esa barra se exhibe en la Figura 5- 6:

⁶⁰ CNE (Abril 2005) *Fijación de precio nudo abril de 2005 Sistema Interconectado Central*, datos publicados en archivo electrónico en página WEB de la Comisión Nacional de Energía.

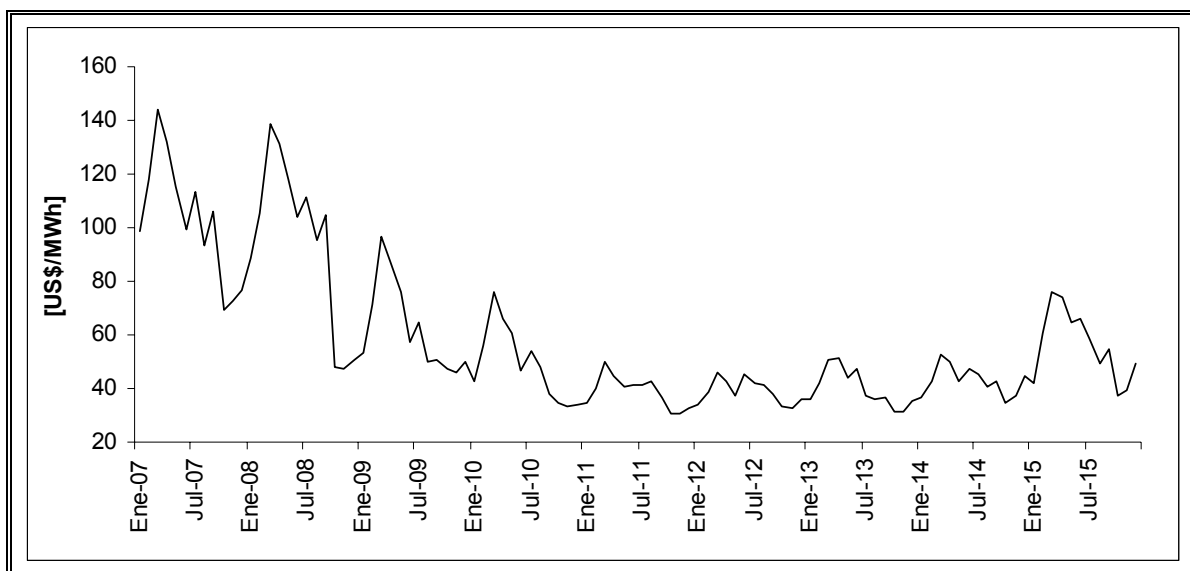


Figura 5- 6: Evolución de costos marginales para la barra Cerro Navia 220

Así, considerando una tasa de actualización del 10% real, se tiene que el precio spot anual equivalente esperado resulta ser:

$$P_s = \frac{\sum_{t=1}^{108} \frac{P_s^t \times Q^t}{(1 + 0,7974\%)^t}}{\sum_{t=1}^{108} \frac{Q^t}{(1 + 0,7974\%)^t}} = 60,17 \quad [\text{US\$}/\text{MWh}]$$

Sobre éste, se ha considerado una desviación estándar de 5 [US\$/MWh], según un estudio heurístico presentado en el Anexo N° 1 de éste informe. Nótese que para el cálculo anterior se ha considerado que los pagos se efectúan el último día de cada mes, cifra que se actualiza al día 1 de enero del 2007⁶¹.

⁶¹ El primer pago se realiza el día 31 de enero de 2007.

Si bien, la capacidad necesaria para abastecer la demanda requerida es de unos 250 [MW] en el primer año, el generador debe contar con una capacidad de unos 570 [MW] para el último año de vigencia del contrato⁶².

Además, se ha considerado que el valor del precio spot futuro distribuye $N(60,17 ; 5)$, y que el error con que cada individuo estima dicho valor en forma privada es del 15%.

A continuación, se muestran las curvas de estrategia que rigen el comportamiento de los oferentes en el caso que los individuos actúan coludidos como holding, y considerando además que no se reciben ofertas internacionales, es decir, la licitación cuenta con sólo tres competidores. Más adelante se analiza el caso en el cual los generadores actúan maximizando los beneficios de sus propias compañías y no el beneficio del holding completo. Con el fin de conseguir el equilibrio puro de mercado, los primeros resultados exhibidos desprecian el efecto del precio de reserva.

⁶² Considerando un factor de carga del sistema de 0.744

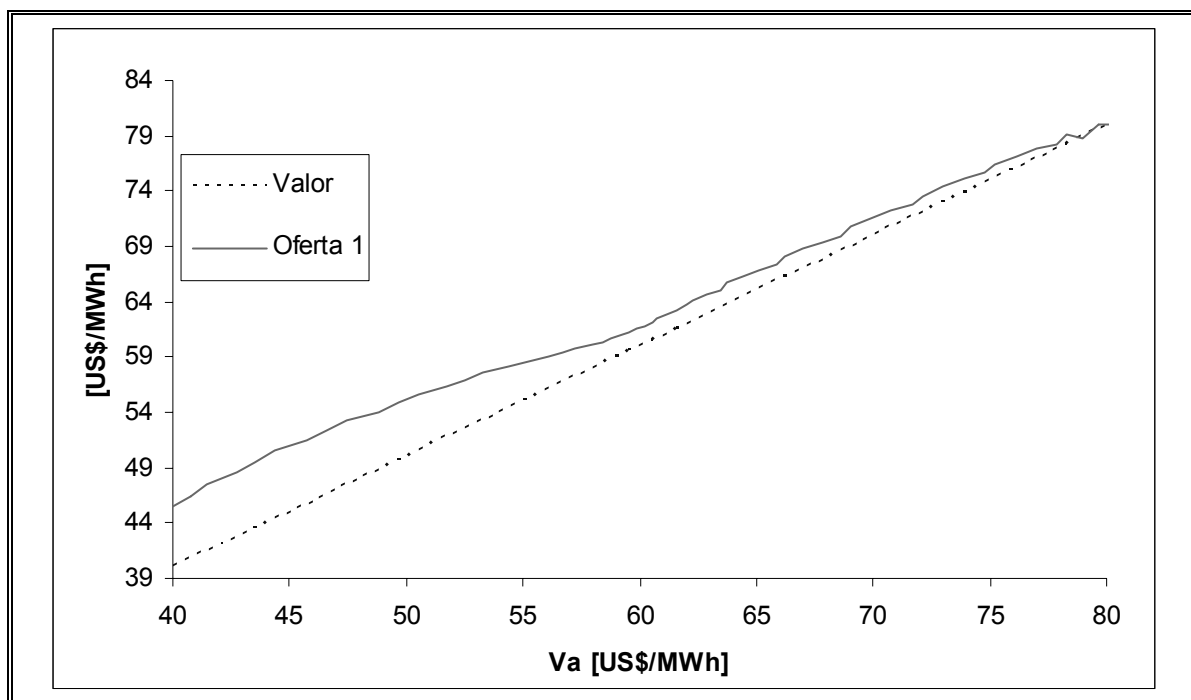


Figura 5- 7: Curva de estrategia de oferentes en un mercado con 3 generadores

Como se puede apreciar de la Figura 5- 7, el generador realiza una oferta con un margen bastante holgado cuando éste cree que el precio spot estará bajo los 60 [US\$/MWh], tratando de aprovechar la información privada que le revela un escenario de precios bajos en el futuro, mientras las expectativas de todo el resto del mercado bordea un precio más alto. Sin embargo, cuando sus expectativas son más pesimistas, el oferente conserva una postura conservadora respecto al margen de ganancia, ya que si amplía dicho margen, tendría bajísimas posibilidades de adjudicarse la subasta.

Es relevante recalcar que un individuo en la media, es decir, que piensa que el precio spot futuro efectivamente será de 60 [US\$/MWh], realizará una oferta con un margen de ganancia de sólo 2 [US\$/MWh], resultando ésta ser bastante agresiva.

Finalmente, al hacer interactuar a estos tres individuos en la subasta, el adjudicatario oferta un precio cercano a los 60 [US\$/MWh]. El resultado del algoritmo que revela el precio de equilibrio se presenta en la Figura 5- 8, ésta muestra el proceso de

convergencia del método de Monte Carlo. En éste, en cada iteración adicional se aumenta el número de muestras con que se realiza el experimento en 20 unidades, siendo la primera iteración realizada con un total de 20 muestras⁶³.

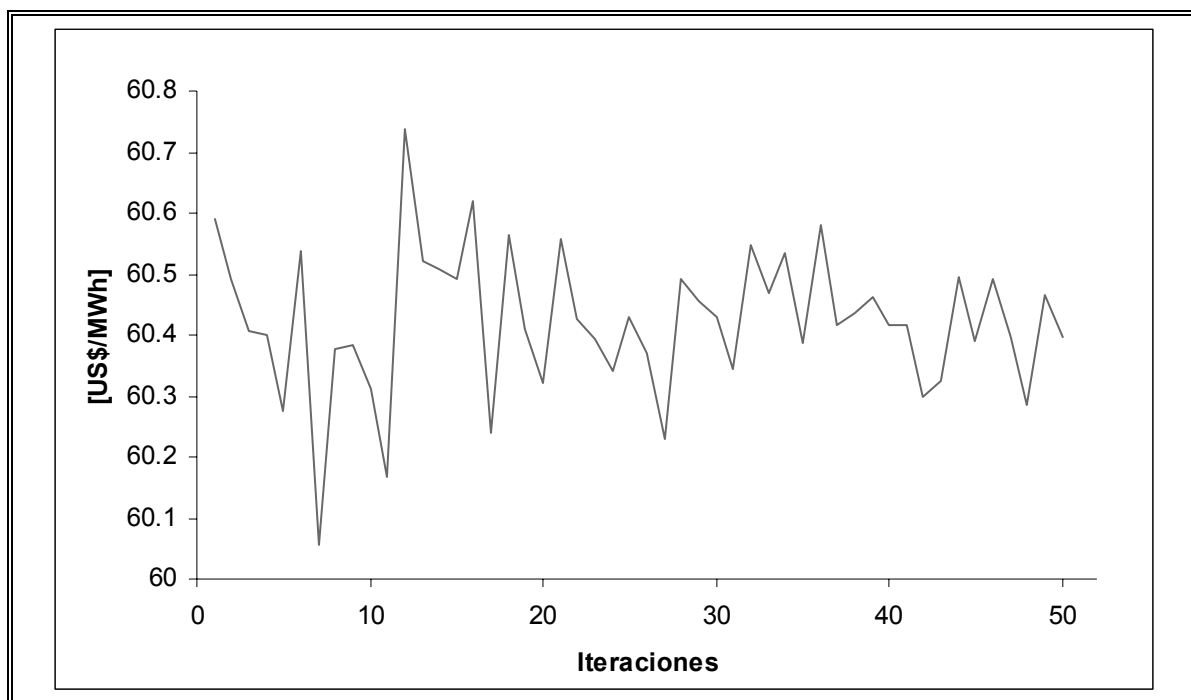


Figura 5- 8: Precio de equilibrio en una licitación de primer precio sobre cerrado

Anteriormente, se señaló que los individuos efectuarían ofertas sobre sus expectativas de valor del precio spot, pero el equilibrio de mercado resultó ser igual al valor esperado del precio spot, entonces, ¿Qué pasó con la ganancia del ganador? La respuesta es muy simple, todos los oferentes realizaron ofertas por sobre sus expectativas de valor del precio spot futuro, pero evidentemente, el adjudicatario de la subasta es aquel que posee la expectativa más optimista acerca del escenario futuro, por lo tanto dicho individuo piensa que el precio spot futuro estará bajo los 60 [US\$/MWh]. De hecho, según

⁶³ Así, la iteración N° 50 se realizó con un total de 1000 muestras.

la curva de estrategias $\beta(\cdot)$, las expectativas del individuo adjudicatario acerca del precio spot futuro están en torno a los 58 [US\$/MWh]. Este fenómeno se conoce bajo el nombre de *la maldición del ganador*, el cual está definido con más detalle en el punto II.2.1.2. Sin embargo, ésta no debe ser problemática si el ganador cuenta con una base sólida respecto a sus expectativas de precio.

Si ahora se desea analizar el efecto del precio de reserva impuesto por el regulador a la licitación, primero se debe estimar cual será su anualidad equivalente. El procedimiento es similar al efectuado para el precio spot (anual equivalente) presentado anteriormente. Es decir:

$$Pr = \frac{\sum_{t=1}^{108} \frac{Pr^t \times Q^t}{(1 + 0,7974\%)^t}}{\sum_{t=1}^{108} \frac{Q^t}{(1 + 0,7974\%)^t}} = \frac{\sum_{t=1}^{108} \frac{Pr^0 (1 + 0,083\%)^t \times Q^t}{(1 + 0,7974\%)^t}}{\sum_{t=1}^{108} \frac{Q^t}{(1 + 0,7974\%)^t}} = 65 \quad [\text{US\$ / MWh}]$$

Para éste se ha considerado una tasa de indexación constante esperada del 1% real, junto con un valor de $Pr^0 = 62,62$ [US\$/MWh] el cual se calculó en base a una estimación de $Pr^{-12} = 62$ [US\$/MWh]⁶⁴ para diciembre de 2005.

A continuación, en la Figura 5- 9 se presentan las curvas de estrategia de los oferentes para 5 casos con distintos precios de reserva:

- Oferta 1: sin precio de reserva
- Oferta 2: $Pr = 77$ [US\$/MWh]
- Oferta 3: $Pr = 73$ [US\$/MWh]
- Oferta 4: $Pr = 69$ [US\$/MWh]
- Oferta 5: $Pr = 65$ [US\$/MWh]

Dada la información anterior, las curvas resultan ser:

⁶⁴ Estimación basada en mera especulación de expertos

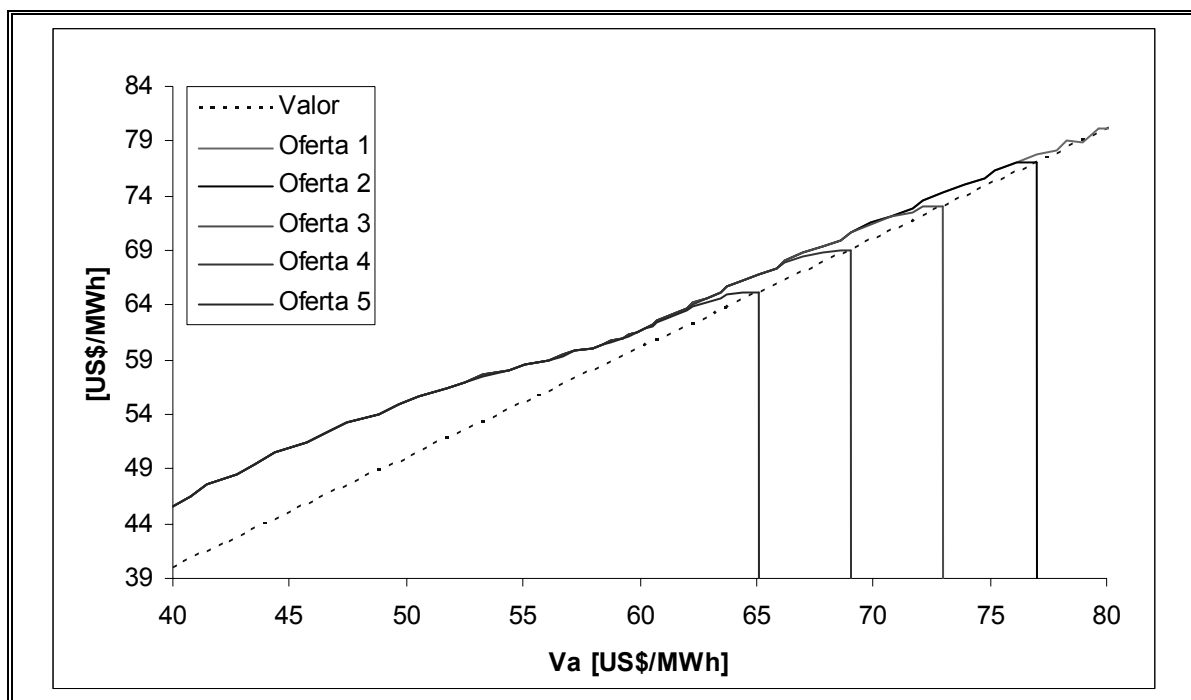


Figura 5- 9: Curvas de estrategia de oferentes en un mercado con 3 competidores con distintos precios de reserva

Como se puede apreciar de la Figura 5- 9 la presencia del precio de reserva no realiza un gran trastorno en la conducta de los oferentes. Éstas siguen presentando un margen razonable sobre la expectativa del valor del precio spot futuro, y todas son muy similares. La diferencia entre ellas radica principalmente en dos aspectos:

- Primero: Las curvas de estrategia correspondientes a las conductas de los agentes cuando existe un precio de reserva impuesto por el regulador, son levemente distintas a la curva sin precio de reserva en torno a la vecindad $V_a \rightarrow Pr$.
- Segundo: Las curvas de estrategia correspondientes a las conductas de los agentes cuando existe un precio de reserva impuesto por el regulador no permite realizar ofertas sobre una cierta cantidad: el precio de reserva.

Las diferencias de comportamiento de las curvas señaladas en el punto Primero se deben al hecho que un individuo con valoración muy cercana al precio de reserva, debe realizar una oferta muy similar a este precio dado que de otra manera quedaría fuera del

proceso. Este hecho se puede ver en la Figura 5- 9 donde las curvas se *aplanan* en la vecindad de $V_a = Pr$. Fuera de esta vecindad el comportamiento de los individuos es similar al de un proceso de licitación donde no existe un precio de reserva.

El equilibrio de mercado para cada una de las situaciones anteriores se muestra a continuación en la Figura 5- 10:

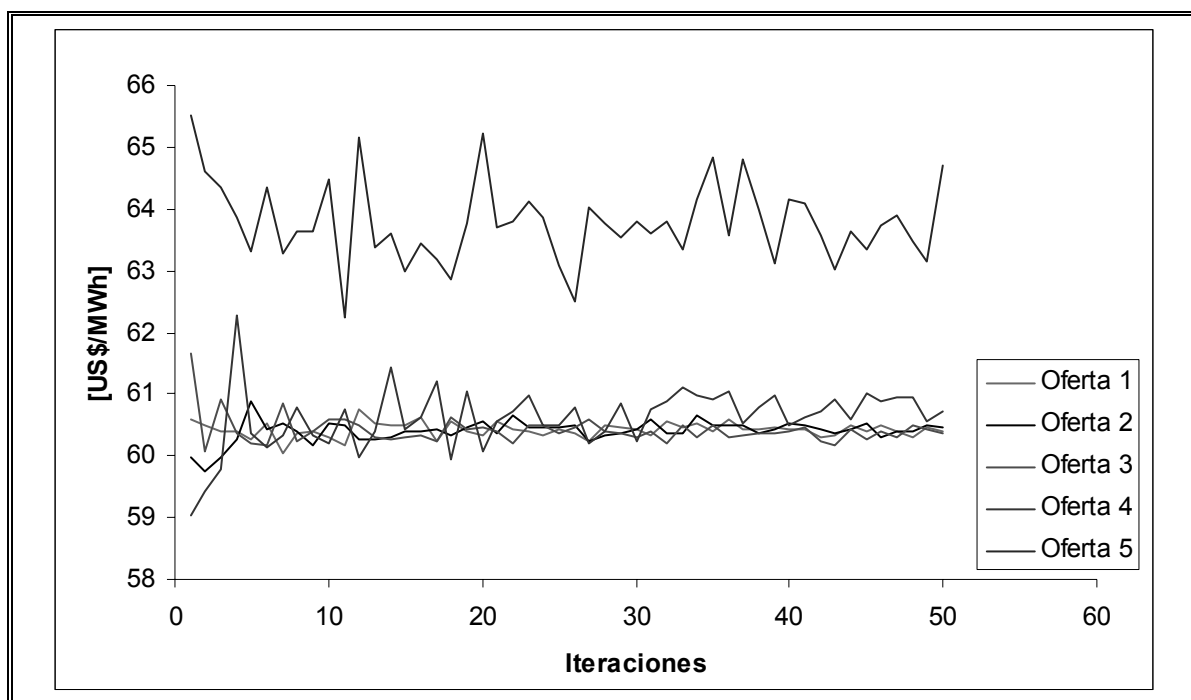


Figura 5- 10: Precio de equilibrio en una licitación de primer precio sobre cerrado con distintos precios de reserva

Dado que la forma de la curva de estrategia de los generadores en presencia de precio techo es muy similar al caso en que no existe dicho techo, el equilibrio de mercado sigue convergiendo dentro de la banda 60-61 [US\$/MWh]. Sin embargo, para el caso donde el precio de reserva es el más restrictivo ($Pr = 65$ [US\$/MWh]), el equilibrio de mercado se eleva a un valor cercano a los 64 [US\$/MWh]. Se debe recalcar que el equilibrio de mercado, en este caso, corresponde a los pagos incurridos por el distribuidor,

y dado que existe una *probabilidad que el distribuidor no adjudique la licitación (evento asociado a un costo de $C_d = 100$ [US\$/MWh])*, el equilibrio se ve incrementado levemente por el costo adicional de no adjudicar la licitación⁶⁵. En otras palabras, el alto precio que presenta la curva *Oferta5* se debe a la posibilidad que la subasta se declare desierta, incurriendo toda la sociedad en un gran costo, y no al hecho que los generadores incrementen sus ofertas al ver disminuido el precio de reserva. De hecho, tal como se mencionó anteriormente, el nivel de precios de las curvas de estrategia (de oferta) se mantienen prácticamente intactos.

Ahora, si se considera que la subasta es lo suficientemente atractiva como para provocar la entrada de tres nuevos agentes al mercado eléctrico, entonces las ofertas resultan ser bastante más agresivas que en el caso anterior. Este nuevo escenario expuesto se puede vislumbrar en base a los siguientes resultados presentados en la Figura 5- 11 y la Figura 5- 12:

⁶⁵ Para efectos de este estudio, el evento de declarar desierta la licitación se considera una situación altamente negativa, por lo tanto se le ha asignado un alto costo social.

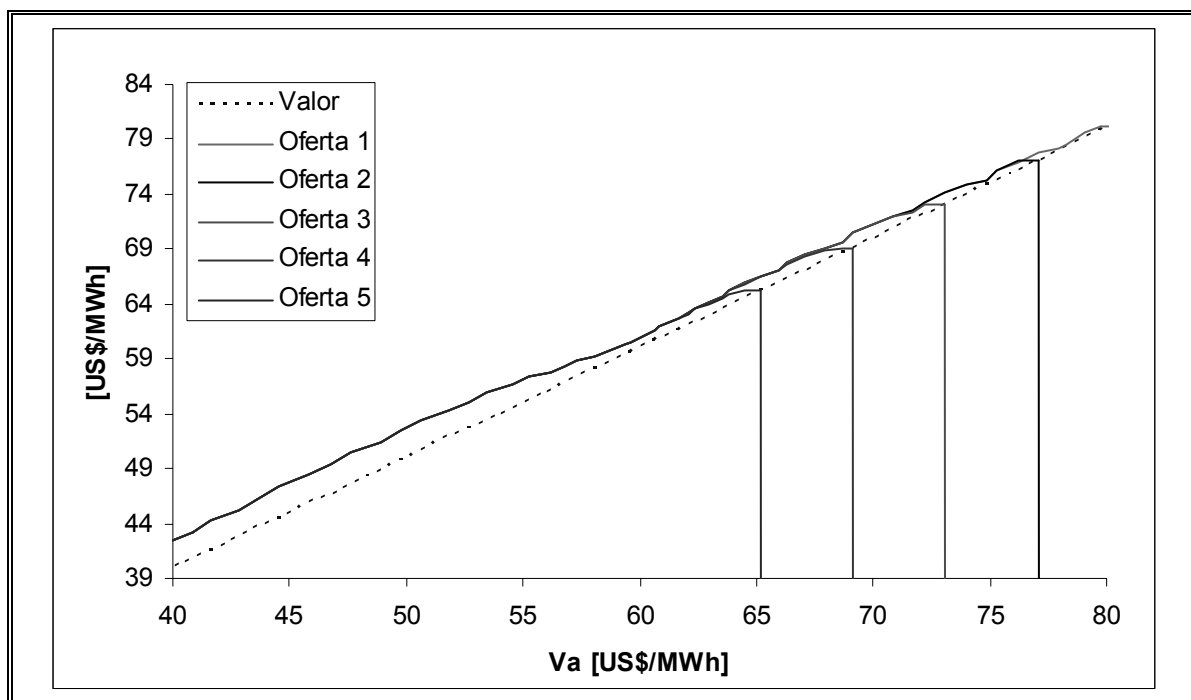


Figura 5- 11: Curvas de estratégia de oferentes em um mercado com 6 competidores com distintos preços de reserva

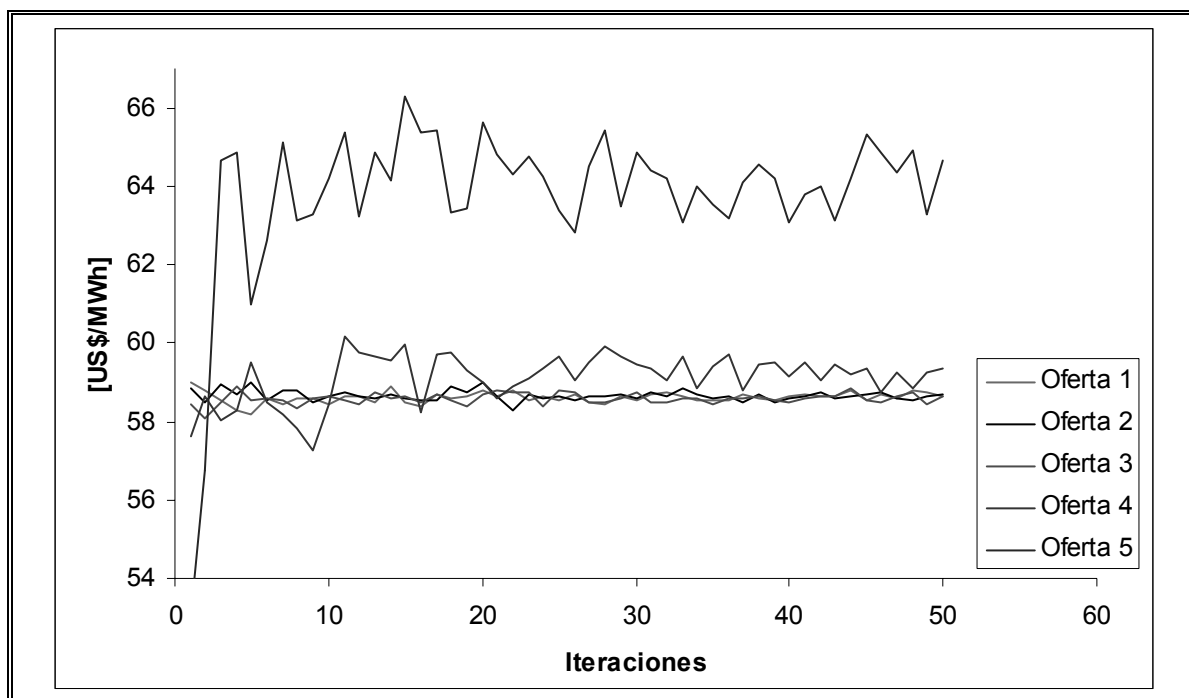


Figura 5- 12: Precio de equilibrio en una licitación de primer precio sobre cerrado con distintos precios de reserva y 6 oferentes

En la Figura 5- 11 se puede observar que la conducta de los oferentes es bastante más agresiva que para el caso donde hay sólo tres oferentes. Por otro lado, en la Figura 5- 12 se puede apreciar que el equilibrio de mercado es levemente más bajo, cerrando en un precio dentro de la banda de 58-59 [US\$/MWh].

Por último, si se considera un escenario hipotético en el cual las todas las empresas actúan en forma independiente, se tiene un total de 8 empresas existentes en el parque generador actual con capacidad mayor a 250 [MW]⁶⁶. Éstas más los tres nuevos inversionistas internacionales participando de la subasta forman un conjunto de once competidores en total. Así, las curvas de estrategia de oferta y el equilibrio de mercado para este nuevo escenario son:

⁶⁶ Ver Tabla V- 2.

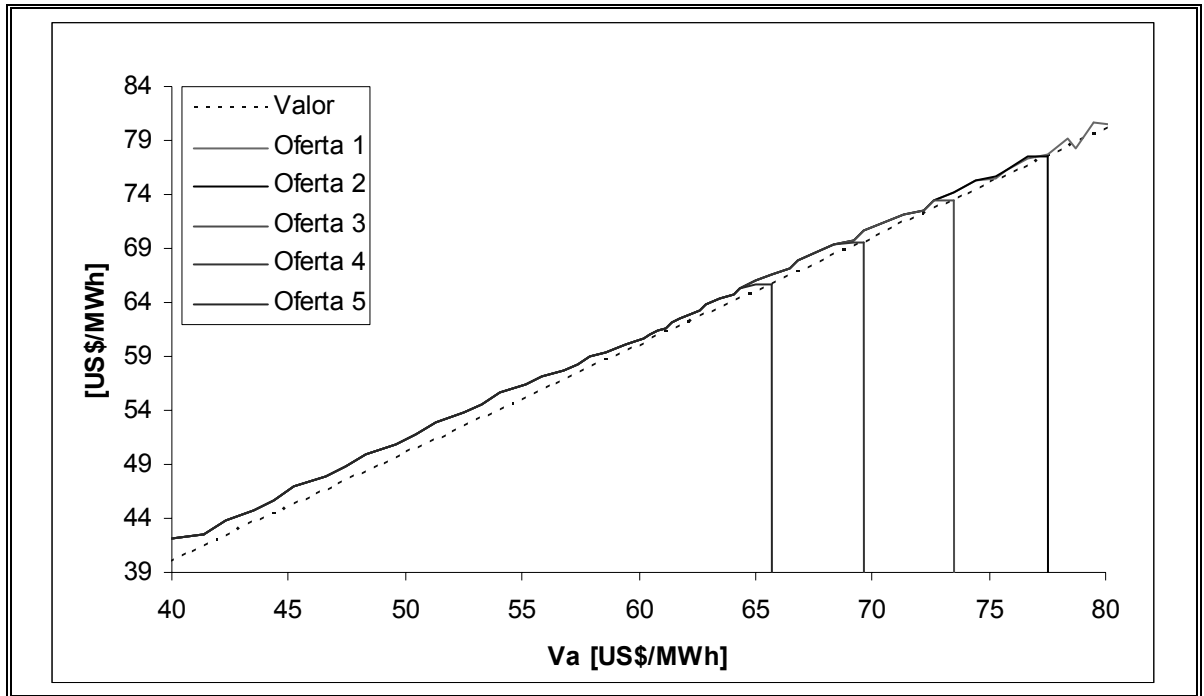


Figura 5- 13: Curvas de estrategia de oferentes en un mercado con 11 competidores con distintos precios de reserva

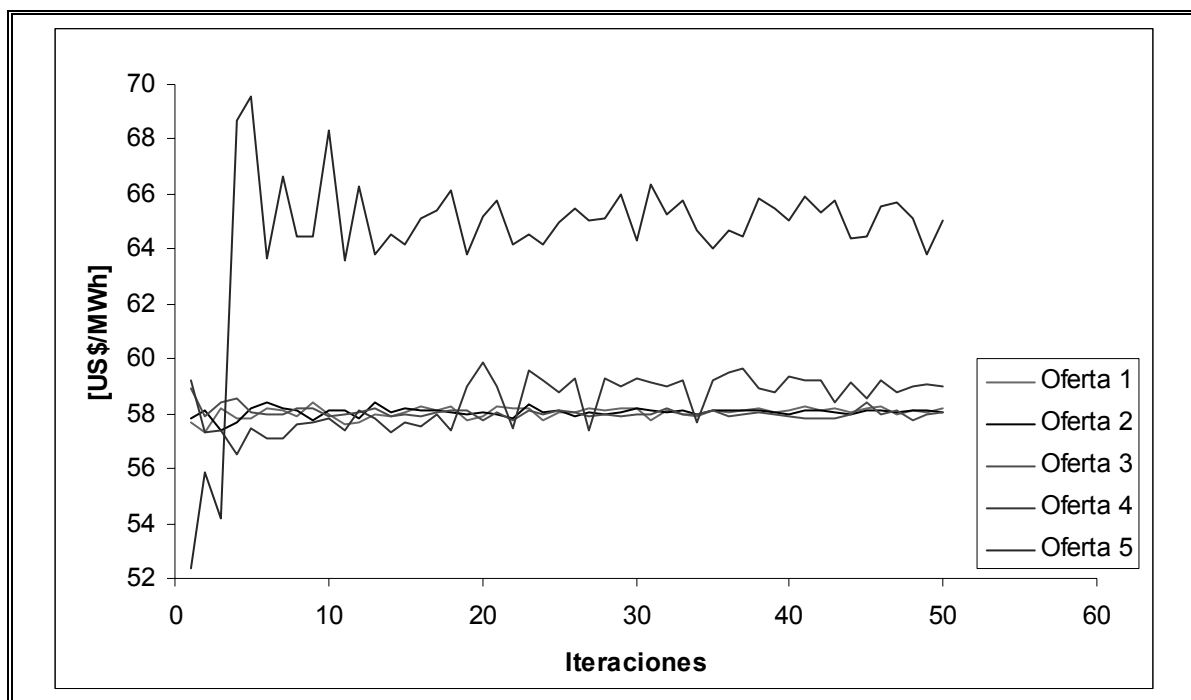


Figura 5- 14: Precio de equilibrio en una licitación de primer precio sobre cerrado con distintos precios de reserva y 11 oferentes

Como se puede apreciar en la Figura 5- 13 para este nuevo escenario las ofertas son más agresivas que para el caso de seis oferentes, pero su influencia sobre el precio final de mercado es marginal, tal como se puede observar en la Figura 5- 14.

Finalmente, resta por decir que los precios despejados en los modelos anteriores corresponden a las anualidades equivalentes, y no a las ofertas a realizar en el momento de la subasta. Por lo tanto, dichas ofertas dependerán de la indexación esperada del precio negociado en el contrato, ya que ésta condiciona totalmente la evolución del precio de compra-venta, y en consecuencia al precio a presentar en la licitación para el año base. Por ejemplo, en el caso en que un oferente espera presentar una oferta (anual equivalente) de 60 [US\$/MWh] con una indexación esperada del 1% real anual, ésta equivale a una oferta en el año base de:

$$\frac{\sum_{t=1}^{108} \frac{Of^0 (1 + 0,083\%)^t \times Q^t}{(1 + 0,7974\%)^t}}{\sum_{t=1}^{108} \frac{Q^t}{(1 + 0,7974\%)^t}} = 60 \quad [\text{US\$ / MWh}] \quad \text{Con} \quad Of^{-12} = \frac{Of^0}{(1 + 1\%)}$$

Lo que resulta una oferta en el momento de la licitación de $Of^{-12} = 56,88$ [US\$/MWh].

En resumen, en este punto se ha presentado una simulación del comportamiento del mercado frente a una subasta de energía convocada por un distribuidor virtual ubicado en la barra Cerro Navia 220. En esta subasta de primer precio, las ofertas de los generadores están siempre por sobre sus expectativas de valor del precio spot, buscando incrementar el margen de ganancia (mediante una oferta cara), pero sin disminuir la posibilidad de ganar la subasta. Se analizó el caso en que varios niveles de precios de reserva son impuestos por la autoridad, y se concluyó que éstos no afectan mayormente el precio de negociación del contrato licitado cuando existe un adjudicatario, pero que si aumenta la posibilidad de que la subasta quede desierta, teniendo que incurrir la distribuidora en un costo adicional. Finalmente, y como era predecible, a mayor número de participantes en la licitación menores los precios de negociación en ésta, volviéndola altamente competitiva en un escenario con presencia de inversionistas extranjeros, y despejando incluso, precios bajo el costo marginal de largo plazo esperado para el sistema, para algunos casos. Es pertinente recordar que las modelaciones presentadas anteriormente, simulan el comportamiento de individuos neutrales al riesgo, en el sentido que éstos no encarecen el valor del contrato dado que aumenta la varianza del valor del precio spot o la variabilidad de su error residual.

V.4. Comportamiento de los Agentes de Mercado y Equilibrio en una Licitación de Sobre Cerrado de Segundo Precio por un Bloque Indivisible

Para estudiar el modelo presentado en el punto IV.4 se supone, al igual que en el punto anterior, una situación real, en la cual un distribuidor virtual perteneciente al SIC oferta su bloque de energía en una subasta de sobre cerrado de segundo precio.

La empresa distribuidora virtual considerada para este ejemplo, es la misma que la utilizada para el caso anteriormente estudiado, es decir, compra energía en el nodo Cerro Navia 220, y ésta es responsable exactamente de un cuarto de la demanda total en dicho punto de compra.

Todo el resto de las consideraciones de energía licitada, costo marginal esperado, función de probabilidad del precio spot, error residual de las estimaciones privadas, condiciones del contrato, etc. son las mismas que para el caso anterior. En otras palabras, es el mismo caso anterior pero con otro mecanismo de subasta.

Así, a continuación se muestran las curvas de estrategia que rigen el comportamiento de los oferentes en el caso que los individuos actúan coludidos como holding, y considerando además que no se reciben ofertas internacionales, es decir, la licitación cuenta con sólo tres competidores. Con el fin de conseguir el equilibrio puro de mercado, los primeros resultados exhibidos desprecian el efecto del precio de reserva.

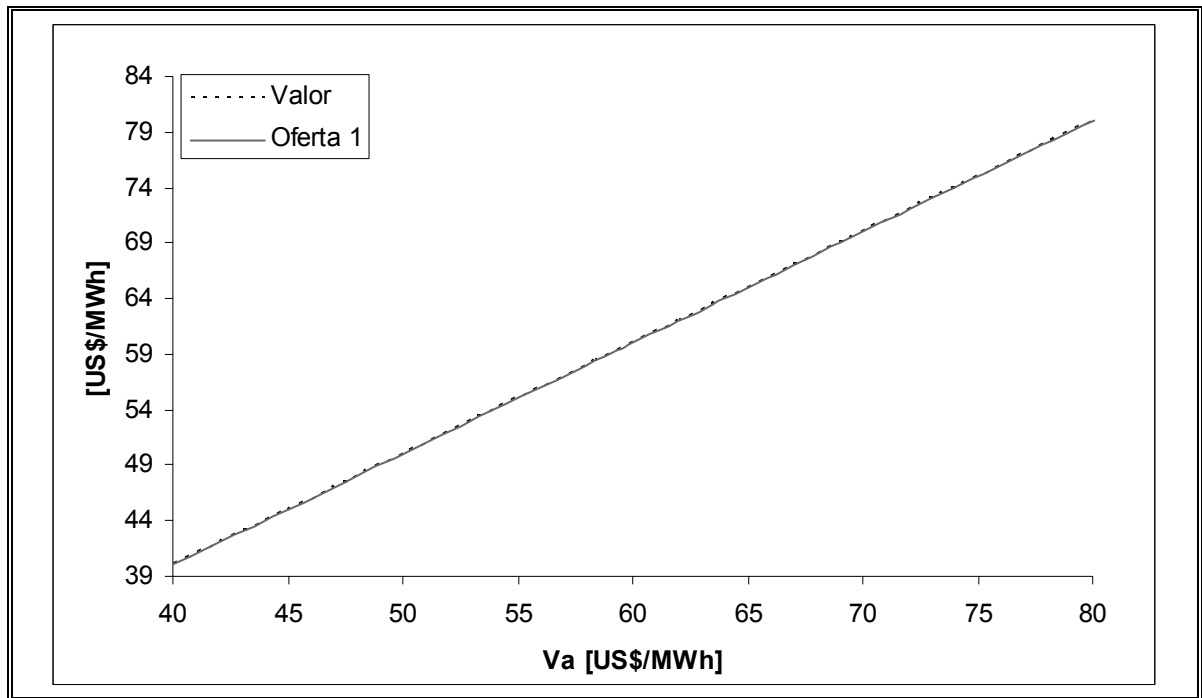


Figura 5- 15: Curva de estrategia de oferentes en un mercado con 3 generadores

Como se puede apreciar de la Figura 5- 15, el generador realiza una oferta que revela su valoración del precio spot futuro, a diferencia del caso anterior en el cual la oferta realizada está por sobre su valor estimado. En otras palabras, en este caso para cualquier agente es más conveniente presentar una oferta igual a su valoración, en lugar de presentar una oferta que presente una ganancia por sobre ésta. Dado que la licitación es de segundo precio, es bastante evidente que el individuo presente una oferta igual a su valoración, ya que de presentar una oferta superior sólo está reduciendo su probabilidad de ganar la licitación, mientras mantiene constante su margen de ganancia. Por ejemplo, un individuo en la media, es decir, que piensa que el precio spot futuro será de 60 [US\$/MWh], realizará una oferta igual a 60 [US\$/MWh], la cual no presenta ningún margen de ganancia.

Finalmente, al hacer interactuar a estos tres individuos en la subasta, el adjudicatario negocia un precio cercano a los 60 [US\$/MWh]. El resultado del algoritmo

que revela el precio de equilibrio se presenta en la Figura 5- 16, ésta muestra el proceso de convergencia del método de Monte Carlo.

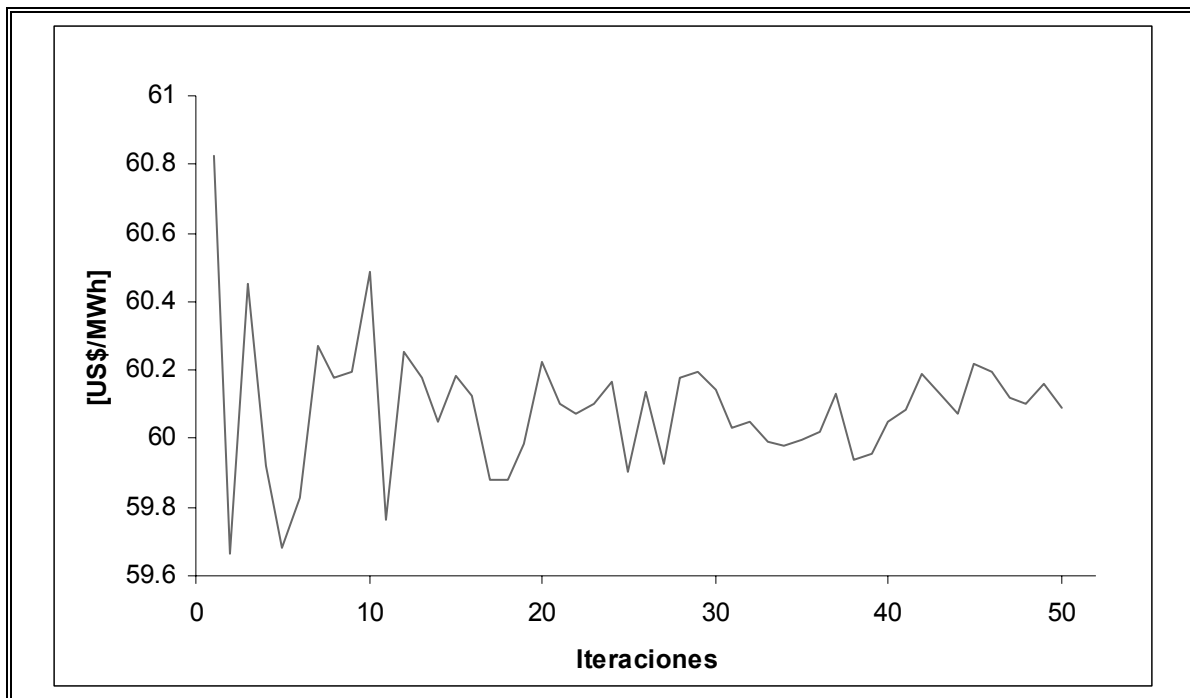


Figura 5- 16: Precio de equilibrio en una licitación de segundo precio sobre cerrado

También se puede observar en éste caso, que tanto el valor esperado del precio spot, como el precio de equilibrio resultaron ser iguales, por lo que no hay una ganancia clara para el adjudicatario. Nuevamente, se está en frente de la denominada *maldición del ganador*, la cual ya fue discutida en el punto anterior. Dado que los participantes de esta subasta son los mismos que para el caso anterior, se puede concluir que el adjudicatario tiene aproximadamente una valoración de 58 [US\$/MWh], y que el generador que realizó la segunda oferta más económica tiene una valoración de aproximadamente 60 [US\$/MWh].

Para analizar el efecto del precio de reserva impuesto por el regulador a la licitación, se utilizarán los resultados obtenidos al respecto en el punto anterior, donde resulta un precio de reserva anual equivalente de 65 [US\$/MWh].

A continuación, en la Figura 5- 17 se presentan las curvas de estrategia de los oferentes para 5 casos con distintos precios de reserva:

- Oferta 1: sin precio de reserva
- Oferta 2: Pr = 77 [US\$/MWh]
- Oferta 3: Pr = 73 [US\$/MWh]
- Oferta 4: Pr = 69 [US\$/MWh]
- Oferta 5: Pr = 65 [US\$/MWh]

Dada la información anterior, las curvas resultan ser:

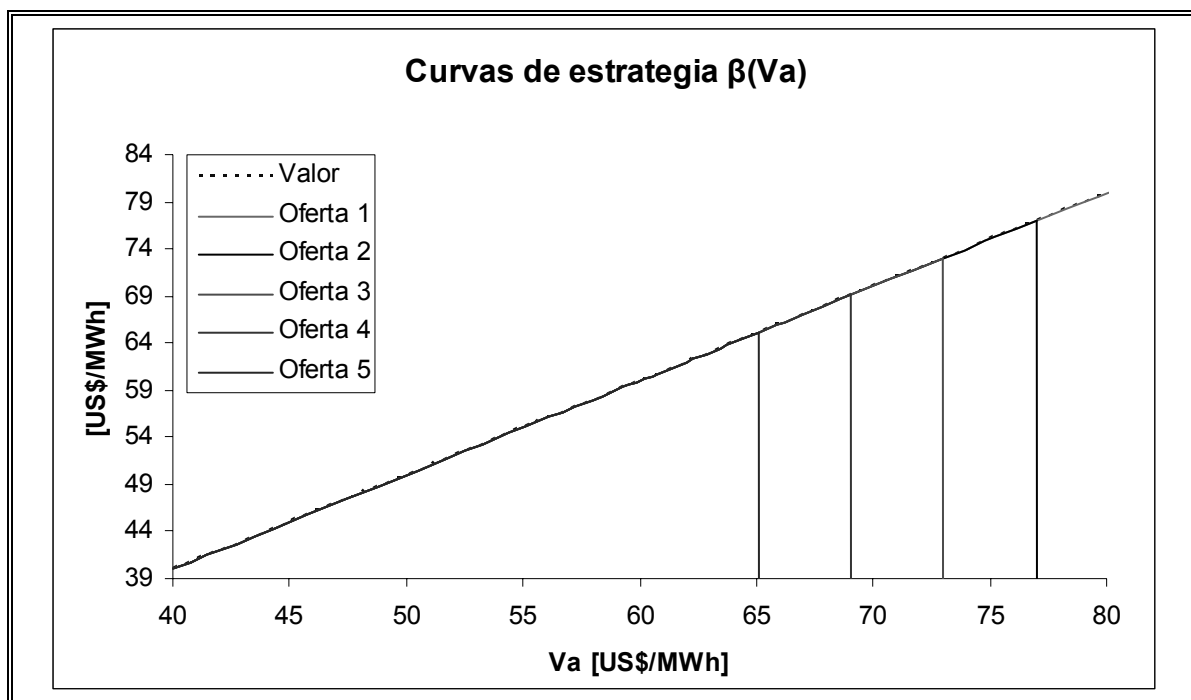


Figura 5- 17: Curvas de estrategia de oferentes en un mercado con 3 competidores con distintos precios de reserva

Como se puede apreciar de la Figura 5- 17 la presencia del precio de reserva no realiza un gran trastorno en la conducta de los oferentes. Éstas persiguen la misma estrategia de ofertar lo valorado, con la diferencia que las curvas de estrategia correspondientes a la conducta con precio de reserva no permite realizar ofertas sobre una cierta cantidad: el precio de reserva.

El equilibrio de mercado para cada una de las situaciones anteriores se muestra a continuación en la Figura 5- 18:

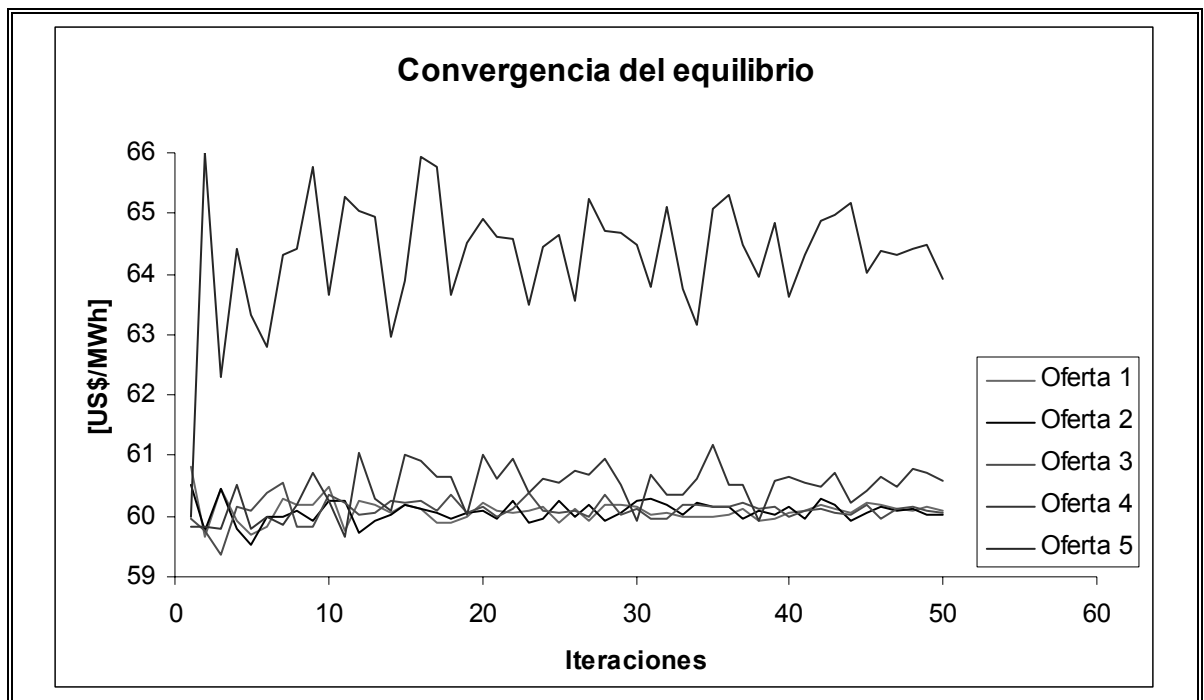


Figura 5- 18: Precio de equilibrio en una licitación de primer precio sobre cerrado con distintos precios de reserva

Dado que la forma de la curva de estrategia de los generadores en presencia de precio techo es muy similar al caso en que no existe dicho techo, el equilibrio de mercado sigue convergiendo a un valor aproximado de 60 [US\$/MWh]. Sin embargo, para el caso donde el precio de reserva es el más restrictivo ($Pr = 65$ [US\$/MWh]), el equilibrio de

mercado se eleva a un valor cercano a los 64 [US\$/MWh]. Se debe recalcar que el equilibrio de mercado, en este caso, corresponde a los pagos incurridos por el distribuidor, y dado que existe una *probabilidad que el distribuidor no adjudique la licitación (evento asociado a un costo de $C_d = 100$ [US\$/MWh])*, el equilibrio se ve incrementado levemente por el costo adicional de no adjudicar la licitación⁶⁵. En otras palabras, el alto precio que presenta la curva *Oferta5* se debe a la posibilidad que la subasta se declare desierta, incurriendo toda la sociedad en un gran costo, y no al hecho que los generadores incrementen sus ofertas al ver disminuido el precio de reserva. De hecho, tal como se mencionó anteriormente, el nivel de precios de las curvas de estrategia (de oferta) se mantiene prácticamente intacto.

Ahora, si se considera el hecho que la subasta es lo suficientemente atractiva como para provocar la entrada de tres nuevos agentes al mercado eléctrico, entonces las ofertas resultan ser iguales a las del caso anterior, pero el equilibrio de mercado converge a un precio más competitivo. Este nuevo escenario expuesto se puede vislumbrar en base a los siguientes resultados presentados en la Figura 5- 19 y la Figura 5- 20:

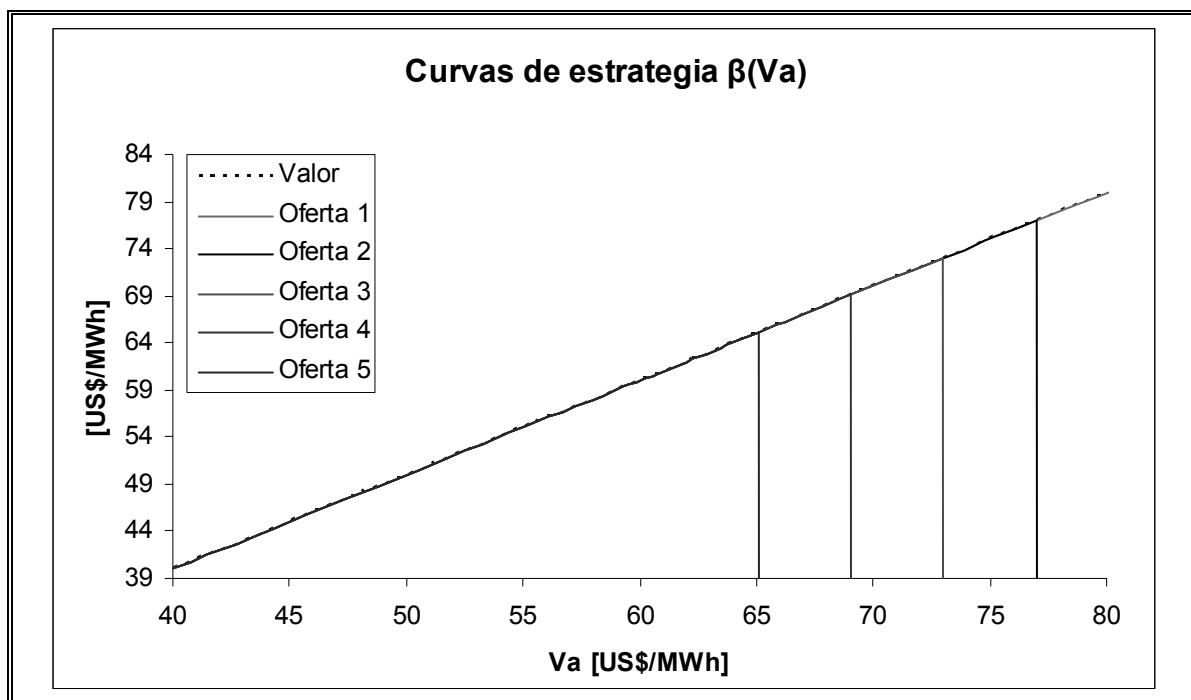


Figura 5- 19: Curvas de estrategia de oferentes en un mercado con 6 competidores con distintos precios de reserva

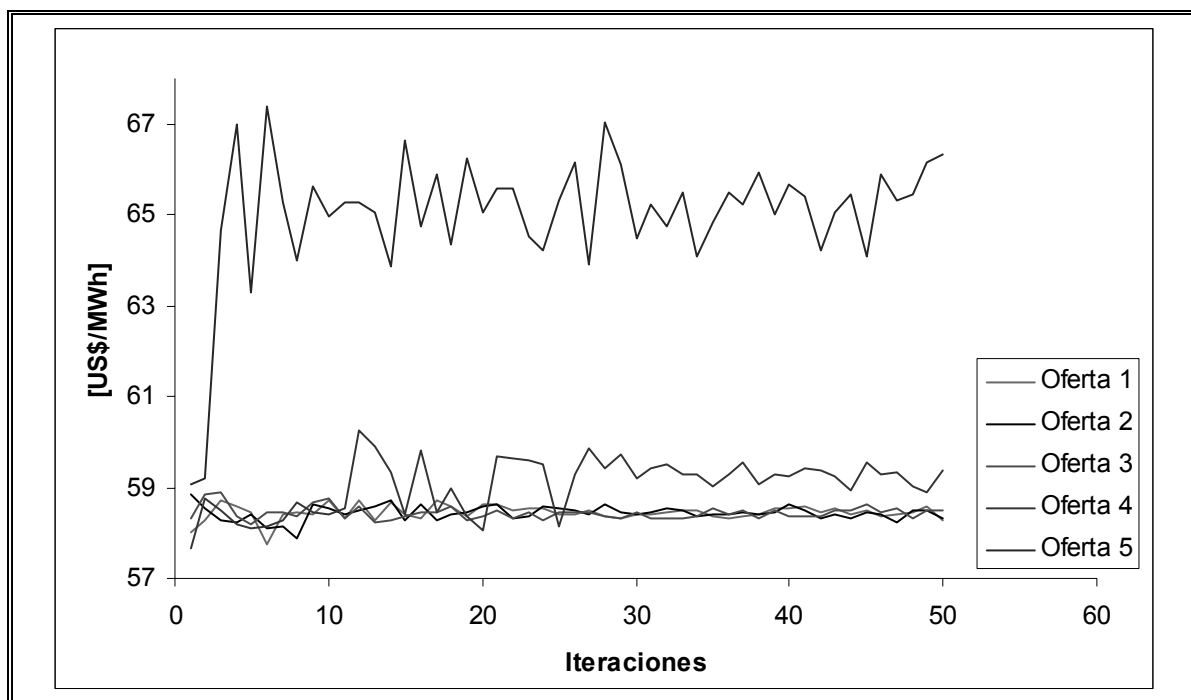


Figura 5- 20: Precio de equilibrio en una licitación de primer precio sobre cerrado con distintos precios de reserva y 6 oferentes

En la Figura 5- 19 se puede observar que la conducta de los generadores es la misma que para el caso donde hay sólo tres competidores. Por otro lado, en la Figura 5- 20 se puede apreciar que el equilibrio de mercado es levemente más bajo, cerrando a un precio cercano a los 58 [US\$/MWh].

Por último, si se considera un escenario hipotético en el cual todas las empresas actúan en forma independiente, se tiene un total de 8 empresas existentes en el parque generador actual con capacidad mayor a 250 [MW]⁶⁶. Éstas más los tres nuevos inversionistas internacionales participando de la subasta forman un conjunto de once competidores en total. Así, las curvas de estrategia de oferta y el equilibrio de mercado para este nuevo escenario son:

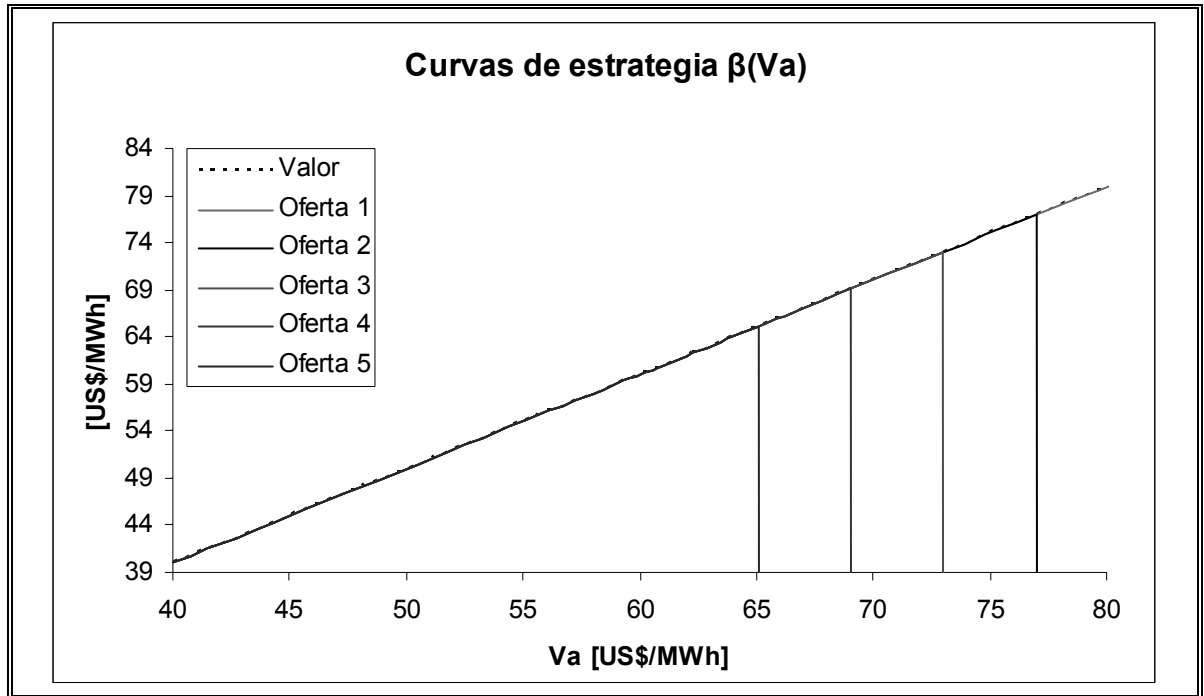


Figura 5- 21: Curvas de estrategia de oferentes en un mercado con 11 competidores con distintos precios de reserva

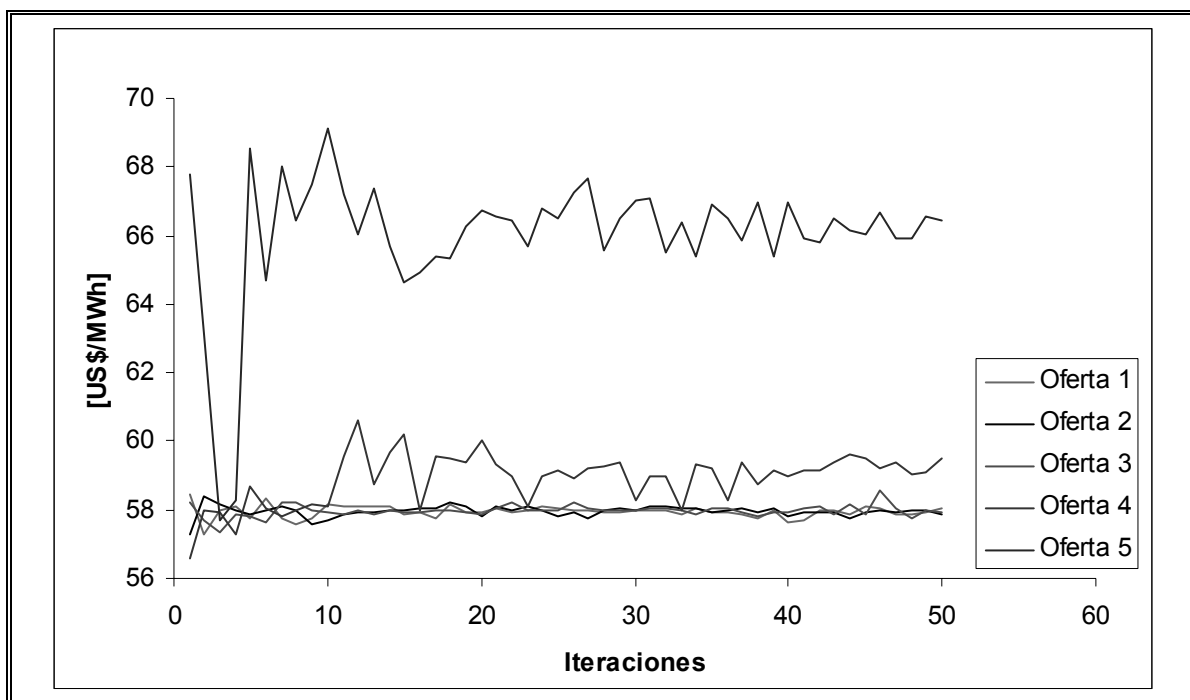


Figura 5- 22: Precio de equilibrio en una licitación de primer precio sobre cerrado con distintos precios de reserva y 6 oferentes

Como se puede apreciar en la Figura 5- 21 para este nuevo escenario las ofertas son iguales que para los dos casos estudiados anteriormente. Sin embargo, el equilibrio alcanzado en este caso es levemente más bajo que el anterior, tal como se puede ver en la Figura 5- 22 y la Figura 5- 20.

Al igual que para el caso anterior, los precios despejados corresponden a las anualidades equivalentes, y no a las ofertas a realizar en el momento de la subasta.

En resumen, en este punto se ha presentado una simulación del comportamiento del mercado frente a una subasta de energía convocada por un distribuidor virtual ubicado en la barra Cerro Navia 220. En esta subasta de segundo precio, las ofertas de los generadores revelan siempre la valoración del precio spot futuro, sin importar el número de oferentes participantes de la subasta. Se analizó el caso en que varios niveles de precios de reserva son impuestos por la autoridad, y se concluyó que éstos no afectan mayormente el precio de negociación del contrato licitado cuando existe un adjudicatario, pero que si aumenta la

posibilidad de que la subasta quede desierta, teniendo que incurrir la distribuidora en un costo adicional. Finalmente, y como era predecible, a mayor número de participantes en la licitación menores los precios de negociación en ésta, volviéndola altamente competitiva en un escenario con presencia de inversionistas extranjeros, y despejando incluso, precios bajo el costo marginal de largo plazo esperado para el sistema, para algunos casos. Es pertinente recordar que las modelaciones presentadas anteriormente, simulan el comportamiento de individuos neutrales al riesgo, en el sentido que éstos no encarecen el valor del contrato dado que aumenta la varianza del valor del precio spot o la variabilidad de su error residual.

V.5. Comparación Entre los Modelos de Primer y Segundo Precio

En los puntos V.3 y V.4 se presentaron los resultados de los modelos de subastas pertenecientes a los mecanismos de sobre cerrado de primer y segundo precio respectivamente. Si bien en cada uno de éstos las estrategias de ofertas eran notablemente distintas, los equilibrios de mercado resultaron ser *razonablemente* similares. Sin embargo, para los casos en los cuales el precio de reserva no es muy restrictivo se puede observar una leve disminución en los precios de equilibrio del mecanismo de licitación de segundo precio respecto a los precios del mecanismo de primer precio. En la Figura 5- 23 se muestran las iteraciones de convergencia del mecanismo de Monte Carlo para los casos en que no se impone precio de reserva.

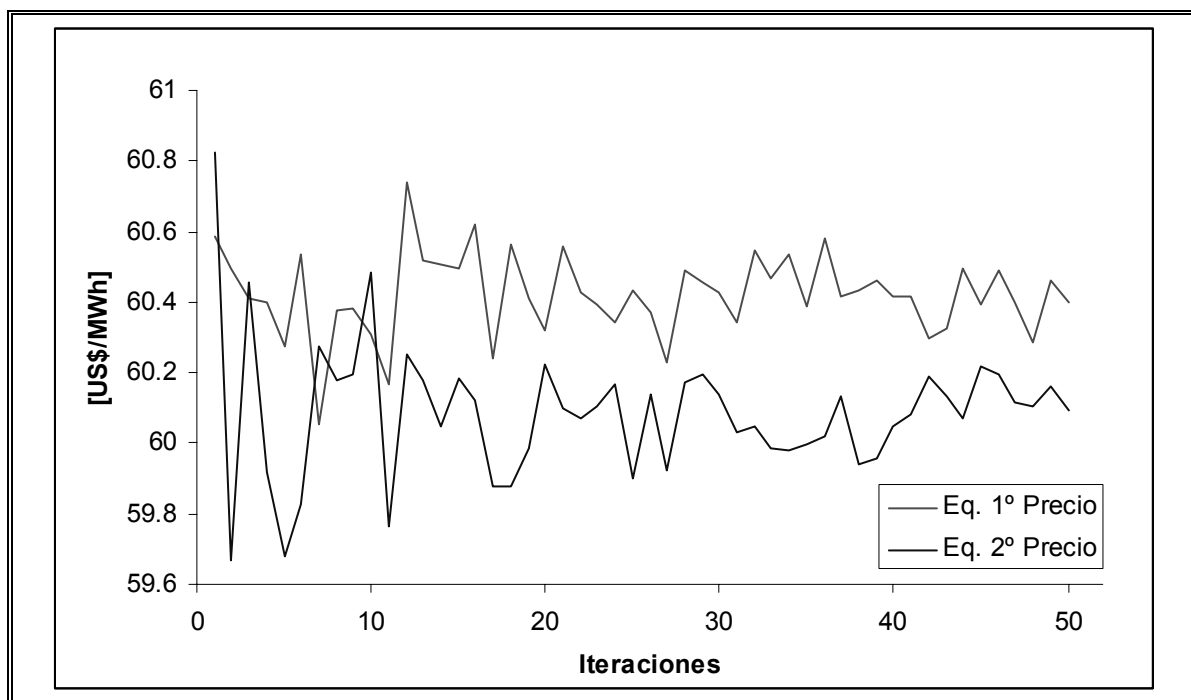


Figura 5- 23: Equilibrio de licitaciones de primer y segundo precio con tres oferentes

Como se puede apreciar de la Figura 5- 23 el equilibrio de mercado para la situación en la cual se lleva a cabo una licitación de segundo precio resulta ser más beneficiosa desde el punto de vista del distribuidor, que la subasta de primer precio. Si bien los equilibrios son similares, pudiéndose argumentar que se impone *el principio de remuneración equivalente*, se observa para la mayoría de las iteraciones un leve descuento sobre el precio de la licitación de segundo precio, por lo que se infiere la presencia del *principio de ranking de los ingresos*⁶⁷. Dicho principio tiene como uno de sus principales corolarios, que el equilibrio obtenido en una subasta de segundo precio de sobre cerrado es igual o más conveniente que el equilibrio obtenido en una subasta de primer precio de sobre cerrado, desde el punto de vista del anfitrión de subasta o martillero, para subastas con valoraciones afiliadas entre participantes. Sin embargo, se debe destacar que en

⁶⁷ Krishna, V. (2002) *Auction Theory*, Cap.7

Milgrom, P. y Weber, R. (1982) *A Theory of Auction and Competitive Bidding*

presencia de un precio de reserva extremadamente restrictivo ($Pr = 65$ [US\$/MWh]), este efecto disminuye, tal como lo muestra la Figura 5- 24:

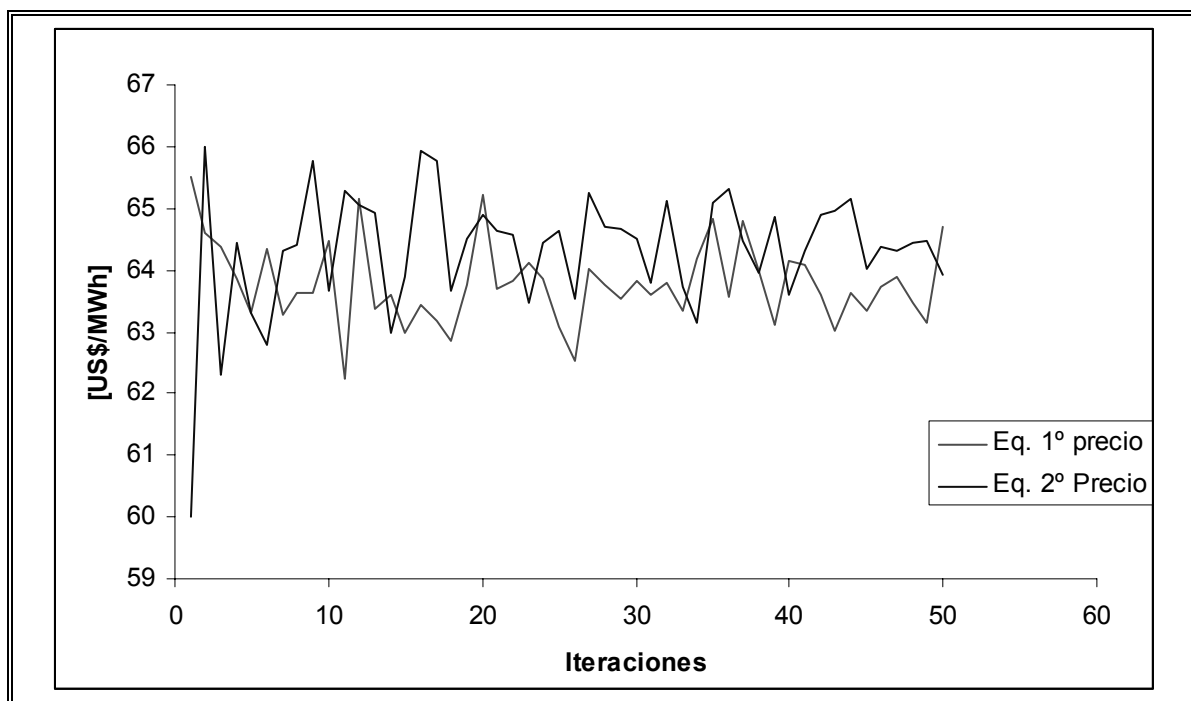


Figura 5- 24: Equilibrio de licitaciones de primer y segundo precio con tres oferentes, y un precio de reserva restrictivo

Como se puede observar en la Figura 5- 24, la leve diferencia existente entre ambos equilibrios para el caso donde no hay precio de reserva (Figura 5- 23), se diluye debido al incremento en la probabilidad que la licitación se declara desierta, presentándose escenarios de altos costos que se ponderan con el precio de equilibrio del resto de los escenarios.

Si bien, con lo anteriormente expuesto se puede argumentar que existe evidencia teórica acerca que no se cumple el principio de remuneración equivalente, la diferencia observada en los precios de equilibrio es marginal (0,3 [US\$/MWh]), concluyendo que en términos prácticos dicho principio prevalece.

Además, se debe considerar que la subasta de segundo precio tiende a ser más eficiente que la subasta de primer precio. Esto, porque, debido a que la estrategia de oferta del mecanismo de primer precio consiste en especular acerca del menor valor del resto de los individuos, situación que permite la existencia de una probabilidad mayor que cero asociada al evento que el generador más eficiente se equivoque en su especulación y pierda la subasta. Si bien, el mecanismo de segundo precio despeja el mismo precio de equilibrio, la estrategia de oferta es muy distinta y asegura eficiencia en la asignación.

V.6. Acerca de Licitaciones por un Bloque Divisible: Análisis Tanto a Licitaciones de Demanda Individual como a Licitaciones Coordinadas de Demanda Agregada

Hasta el momento se han analizado los resultados derivados de los modelamientos de subastas por un bloque indivisible de demanda, es decir, licitaciones en las cuales los oferentes deben presentar ofertas por todo el abastecimiento requerido por la(s) distribuidora(s). Sin embargo, si se desea analizar una subasta en la cual se remata un gran bloque de energía, se debe considerar un mecanismo de licitación que permita realizar ofertas parciales de abastecimiento. Este gran bloque de demanda puede provenir desde:

- una gran compañía distribuidora.
- varias distribuidoras que se han coordinado para licitar un bloque equivalente al total de su demanda agregada.

V.6.1. Licitación de un Gran Bloque de Demanda Proveniente de Una Distribuidora

Tal como se demostró anteriormente en el punto IV.5, cuando se subasta un bloque divisible en dos partes iguales mediante un mecanismo pay-as-bid, existen incentivos a presentar ofertas planas por parte de los generadores que cuentan con toda la capacidad para ofertar.

Para que los generadores realicen ofertas de igual valor por ambos sub-bloques, se deben cumplir, principalmente, dos supuestos que se detallaran en el punto IV.5 que son:

- Dominancia en razón de Hazard y
- Razones inversas de Hazard decrecientes para las variables aleatorias que representan las ofertas por cada sub-bloque (B_i^j)

A pesar que no se puede demostrar exactamente la ocurrencia de éstos supuestos para el caso chileno, si se pueden dar ejemplos particulares donde éstos se cumplen⁶⁸. Por lo tanto, se puede aseverar que los generadores realizarán ofertas planas con probabilidad positiva.

Si se analiza el ejemplo anterior del distribuidor virtual conectado a la barra Cerro Navia 220, el cual ahora decide utilizar un formato de subasta multiproducto pay-as-bid, loteando su demanda en dos bloques. Entonces se tiene que:

- Los grandes generadores, quienes pueden abastecer todo el bloque de 250 MW, realizarán ofertas planas.
- Los pequeños generadores pueden participar por el sub-bloque de 125 MW.

Si se considera un escenario donde los generadores actúan coludidos como holding, entonces se puede asumir que el generador Ibener S.A., el más pequeño de todos (ver Tabla V- 2), entra en competencia lo que provoca que el proceso sea más competitivo.

Si bien, en la presente tesis no se ha construido un modelo matemático que pueda resolver este juego, si se han desarrollado las herramientas para acotar su solución. Para esto, se consideran los siguientes juegos:

- Juego Primero: El distribuidor de la barra Cerro Navia 220, considerado en los ejemplos anteriores, ahora desea licitar su demanda mediante una licitación pay-as-bid loteando su demanda en dos bloques. Para ello hay 4 grandes generadores dispuestos a realizar ofertas (planas) por ambos sub-bloques.

⁶⁸ Ver anexo B

- Juego Segundo: El distribuidor de la barra Cerro Navia 220, considerado en los ejemplos anteriores, ahora desea licitar su demanda mediante una licitación pay-as-bid loteando su demanda en dos bloques. Para ello hay 3 grandes generadores dispuestos a realizar ofertas (planas) por ambos sub-bloques.

Por lo tanto, el precio de equilibrio promedio del problema original, en el cual existen 3 generadores dispuestos a realizar ofertas por todo el bloque mientras existe uno dispuesto a realizar ofertas sólo por un sub-bloque, está acotado superiormente por el equilibrio promedio del *Juego segundo*, y está acotado inferiormente por el equilibrio promedio del *Juego Primero*. Esto, dado que el *Juego Primero* es más competitivo que el juego original y el *Juego Segundo* es menos competitivo que el juego original. En la Figura 5- 25 se muestran los precios de equilibrio del Juego Primero, el Juego Segundo y la estimación de equilibrio del juego originalmente planteado.

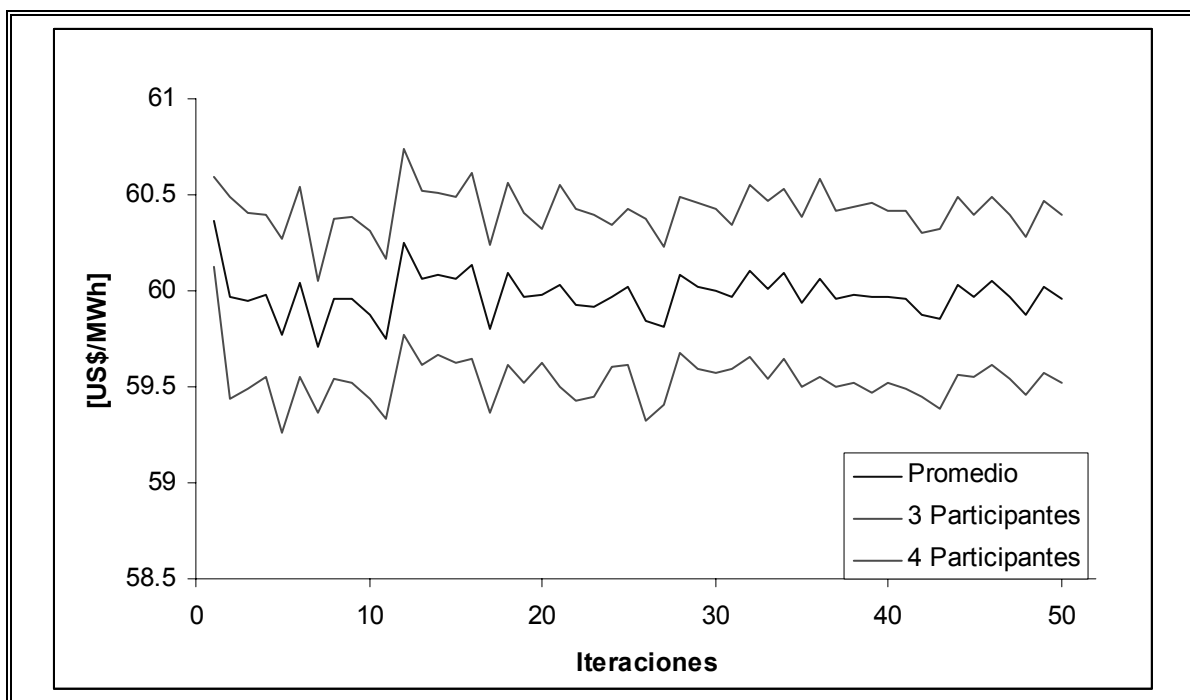


Figura 5- 25: Estimación heurística equilibrio de mercado subasta pay-as-bid

En la Figura 5- 25 estimativamente el precio promedio de equilibrio del problema original se ha trazado como el promedio de los equilibrios que acotan el problema original. Como se puede observar, por definición el equilibrio de la subasta multiproducto pay-as-bid es más competitivo que el equilibrio de una subasta que remata el mismo bloque de demanda, pero sin aceptar ofertas parciales.

El hecho que se divida un gran bloque de demanda en pequeños sub-bloques permite que generadores más pequeños, aquellos que no cuentan con una gran oferta para presentar en una licitación por el bloque entero, entren en competencia incrementando el número de participantes, y en consecuencia, haciendo más competitivo el proceso. Se debe tener presente, que si bien el mercado chileno presenta una alta concentración en tres agentes, existen otros pequeños generadores que forman parte del 8% de la capacidad instalada (aprox. 600 [MW]). Además, se debe considerar el hecho que los generadores en la realidad tienen una distribución óptima de su portfolio⁶⁹, por lo que una subasta en la cual se pueda ajustar mejor su cantidad contratada permite competir en forma más agresiva. Lamentablemente, la decisión de subdividir el bloque de demanda está en manos de los distribuidores, los cuales pueden discriminar fácilmente a los pequeños generadores con el fin de obtener precios menos competitivos dada la integración vertical existente en el mercado. Algunos participantes en el mercado pueden tener la preocupación que el grupo Enersis trate de discriminar mediante éste método, a posibles competidores en una subasta convocada por Chilectra, con el fin que Endesa tenga mayores posibilidades de adjudicarse la subasta. Para evitar estas eventuales condiciones, en el mercado eléctrico colombiano el regulador estableció que toda licitación debe aceptar ofertas parciales de abastecimiento.

En conclusión, una subasta por un bloque divisible de demanda es más competitiva que su versión realizada por un bloque indivisible dentro del contexto de un mercado

⁶⁹ En esta tesis no se ha estudiado el nivel de contratación óptimo de cada generador, sino que se estudia directamente los mecanismos de licitación. La modelación del problema completo de mercado pasaría por estudiar el nivel de contratación óptimo de cada generador antes de decidir presentarse éste a una licitación.

real⁷⁰, por lo tanto, el nivel de precios en equilibrio de este mecanismo es a lo más tan alto como los resultados derivados en el punto anterior, actuando éstos como cota superior. De no existir pequeños generadores que pueden entrar en competencia en un mecanismo multiproducto, entonces el equilibrio es igual si se utiliza un modelo de licitación uniproducto o multiproducto.

V.6.2. Coordinación de Distribuidoras

Dado que la reglamentación actual permite que las distribuidoras se coordinen para licitar su demanda agregada, se desea estudiar si efectivamente éstas tienen incentivos positivos a realizar esta acción. Tal como se demostró en el punto IV.5, si dos distribuidoras se coordinan y agregan su demanda, el equilibrio de esta licitación será similar a cada uno de los equilibrios si las subastas se realizan por separado. Sin embargo, el hecho de agregar la demanda en un sólo bloque divisible permite que la subasta se torne más atractiva, llamando el interés de nuevos inversionistas extranjeros, haciendo el proceso más competitivo.

Al igual que en el caso anterior, el hecho de agregar la demanda y realizar una subasta por un bloque indivisible permite que las condiciones de mercado se alteren. En este caso el número de competidores difiere entre el caso de no-coordinación y coordinación, lo que provoca finalmente que el precio de equilibrio en el mecanismo de licitaciones de la demanda agregada sea más bajo. Así, los precios de mercado derivados en los puntos V.3 y V.4 para los casos de competencia de tres generadores actúan como una cota superior para el equilibrio que se pueden dar si las distribuidoras se coordinan, dado que en el último caso el proceso es más competitivo.

En conclusión, existe un incentivo por realizar grandes subastas de demanda agregada dado que aumenta el atractivo del proceso, aumentando el número de participantes realizando ofertas de venta, principalmente, debido al interés de nuevos

⁷⁰ Dado que se demostró analíticamente que para el caso ideal los resultados de ambos mecanismos de licitación son idénticos con probabilidad positiva.

inversionistas. De no existir esta diferencia en el número de competidores, ambos mecanismos despejan los mismos precios promedios.

V.6.3. Análisis Cualitativo entre Licitación Multiproducto de Precio Uniforme y Precio Discriminatorio

A pesar que la modelación matemática de licitaciones multiproducto presentada en el punto IV.5, sólo se realizó para el caso pay-as-bid o discriminatorio, a continuación se desea incluir un pequeño análisis cualitativo entre los formato multiproducto de precio uniforme v/s el formato pay-as-bid.

Las subastas pay-as-bid han nacido con el propósito de disminuir la influencia del poder de mercado. El argumento es el siguiente: en una subasta de precio uniforme es posible aumentar el precio que cobran todos los productores, solamente subiendo la oferta del productor marginal (aquel que realiza la oferta más cara). Sin embargo, se debe considerar que este productor marginal corre el riesgo de quedar fuera de la casación. De todas formas, se puede observar que este riesgo es mínimo, ya que si el productor queda fuera de la casación sus ingresos siempre son para abastecer los costos, mientras que si el productor queda dentro, la ganancia que puede recibir es alta, ya que le pagarían a mayor precio toda su producción inframarginal. En un modelo de subasta pay-as-bid para obtener una ganancia similar a la anterior, el productor debe subir el precio de todas sus ofertas y arriesgarse a quedar fuera de la casación con toda su producción. Por lo tanto, parece más difícil aprovechar una posición de dominio en la subasta discriminatoria respecto a la subasta de precio uniforme. Sin embargo, esta solución tiene los siguientes problemas:

- La estrategia de oferta de los productores cambia. Los productores, igualmente, pueden seguir recibiendo beneficios extras si elevan sus ofertas lo suficiente de manera de quedar dentro del grupo inframarginal. Así, el ejercicio se reduce a tratar de predecir la oferta marginal y ofertar justo bajo ese precio. Se puede observar que la remuneración que reciben los productores es muy similar a la que

reciben en una subasta de precio uniforme, pero el uso de las nuevas reglas de pagar a precio ofertado en lugar del precio uniforme tiene implicancias sobre el funcionamiento del mercado²⁴.

El hecho descrito por Vázquez (2003) es totalmente coherente con el resultado obtenido en la demostración analítica presentada en esta tesis, ya que según Vázquez, los generadores elevarían sus ofertas lo suficiente para quedar dentro del grupo inframarginal, lo que implica que las ofertas deben ser curvas planas.

- También, y tal como plantea Wolfram⁵¹, los pequeños productores se pueden ver perjudicados con un mecanismo de subastas de precio discriminatorios, ya que el riesgo que ellos corren al realizar ofertas muy altas es bastante grande, porque significa el quedar o no expuesto al mercado spot por todo un periodo, por lo tanto éstos deben limitarse a realizar ofertas conservadoras. Sin embargo, los productores más grandes, que pueden separar su producción en varios bloques, pueden ser menos conservadores en alguna de sus ofertas. Así, la subasta de precio discriminatorio puede incentivar a que los productores se asocien en grandes grupos agravando el problema de poder de mercado, además esto introduce una gran barrera de entrada a nuevos productores, que por lo general son pequeños.

V.6.4. Conclusión

A pesar que en capítulo IV se demostró analíticamente que los equilibrios de mercado entre una subasta por un bloque divisible y una subasta por un solo bloque indivisible (ambas pay-as-bid) son iguales con probabilidad positiva en condiciones ideales e igualitarias de mercado, hay evidencia para concluir que cuando se alteran las condiciones de mercado de un mecanismo respecto al otro, entonces dicha igualdad se altera a favor de la subasta por el bloque divisible en términos de precio pagado por el distribuidor.

Respecto a la discusión con relación al formato pay-as-bid v/s el formato precio uniforme, se concluye que en presencia de situaciones con pocos participantes y múltiples bienes, no hay argumentos definitivos que expresen en forma teórica cuál de las subastas, precio uniforme o precio discriminatorio, es mejor opción⁵¹.

V.7. Análisis Cualitativo de Relajación de Supuestos

Los modelos presentados en esta tesis tienen como principales supuestos acerca de sus agentes que:

- Son neutrales al riesgo en dos sentidos:
 - Primero, en el sentido que maximizan una función lineal entre la valoración del precio spot y la oferta a realizar.
 - Segundo, en el sentido del descuento de los flujos asociados a los pagos en el mercado spot (incertidumbre del valor común).
- Son simétricos: en el sentido que se tienen las mismas expectativas de comportamiento para todos los participantes de la subasta.

Así, se puede realizar un estudio cualitativo en el cual se relajen estos supuestos y se comparen estas nuevas situaciones con las anteriormente estudiadas en los puntos V.3 y V.4. En consecuencia, los equilibrios derivados para las situaciones anteriores servirán de referencia para los equilibrios correspondientes a las nuevas situaciones en estudio.

V.7.1. Aversión al Riesgo

Se debe advertir que existen distintas clases de riesgos los cuales se pueden estudiar. En particular, en este tipo de subasta existen básicamente dos clases de riesgo a los cuales está sometido el generador:

- Riesgo acerca del verdadero valor común del precio spot, el cual no se conoce hasta el final del periodo de vigencia del contrato.
- Riesgo respecto al evento de adjudicarse la subasta.

Como se puede inferir, la manera de bajar el nivel de exposición a cada uno de éstos involucra acciones totalmente contrapuestas por parte del generador. Si bien, una oferta con un valor bajo permite disminuir el riesgo respecto a la adjudicación de la subasta, ésta aumenta el riesgo de quedar bajo el verdadero valor del precio spot (anual equivalente) y viceversa. De hecho, la manera en que cada individuo se puede cubrir respecto al primer riesgo es realizando una oferta alta, mientras la manera en que cada individuo se puede cubrir respecto al segundo riesgo es realizando una oferta baja.

Tal como se mencionó en el punto III.1.1.2 el modelo de subasta brasilero busca disminuir el riesgo respecto al valor común, realizando rondas sucesivas de oferta, las que permiten vislumbrar las expectativas del resto y modificar las propias en función de las anteriores. Así, el efecto que busca el modelo brasilero es que los generadores realicen ofertas más agresivas que permitan obtener un equilibrio muy competitivo²⁸. En los modelos desarrollados en esta tesis se puede modelar este riesgo mediante el ajuste de la tasa de descuento r , la cual se puede considerar distinta tanto para el descuento de los flujos del mercado spot (r_s), como para los descuentos de venta por contrato (r_C). Evidentemente al aumentar el valor de la variable r_s , las anualidades equivalentes para el precio spot se encarecerán, lo que se refleja en definitiva en un alza en las ofertas de los competidores. A continuación, se presenta la Tabla V- 3 en la cual se exhibe el encarecimiento de la esperanza de la anualidad equivalente del precio spot a medida que se aumenta r_s . Los cálculos se refieren a la misma barra Cerro Navia 220 estudiada anteriormente.

Tabla V- 3: Encarecimiento de la valoración del precio spot en función del riesgo

r %	P _s [US\$/MWh]
0	55,85
5	57,95
10	60,16
12	61,07
14	61,99
16	62,90
18	63,82
20	64,74

En la Tabla V- 3 se destaca la anualidad utilizada para los cálculos presentados en los puntos V.3 y V.4.

Por otro lado, el riesgo respecto al evento de adjudicarse la subasta suele modelarse mediante la función de utilidad de Von-Neumann-Morgenstern, la cual transforma la maximización de cada individuo en un problema del estilo:

$$\text{Max } \{(P_{cn} - P_s)^\alpha \bullet \text{Pr ob}(\text{Ganar Licitación}) \mid \text{tipo}_i\}$$

Donde α refleja la aversión al riesgo de cada individuo con $0 \leq \alpha \leq 1$. Cuando $\alpha = 1$ el individuo es neutral al riesgo, mientras que si $\alpha = 0$ el individuo es infinitamente averso al riesgo, lo que le lleva a efectuar una oferta igual a su valoración del precio spot, para una subasta de primer precio.

Finalmente, si se considera el hecho que los competidores son aversos al riesgo en el sentido de la segunda definición discutida en este capítulo, entonces el equilibrio de mercado para éstos presentarían niveles más económicos que los expuestos en los puntos V.3 y V.4. Sin embargo, se debe considerar el hecho probable que los generadores deseen descontar los flujos futuros a tasa mayores que el 10%, lo que provocaría un alza en los precios finales.

V.7.2. Asimetría

En el estudio expuesto en este documento se consideró que todos los individuos tienen señal privada (x_i) proveniente de la misma función de probabilidad, por lo que se considera que todos éstos tienen un comportamiento similar en la subasta, pues no hay diferencia entre ellos. Sin embargo, en un mercado real existen diferencias entre los distintos individuos, lo que se traduce en la existencia de los denominados agentes fuertes y débiles⁷¹. La diferencia entre estos individuos genera que cada uno tenga una estrategia propia, distinta a la de otro oferente.

En general se ha demostrado que los agentes débiles suelen tener estrategias más agresivas que los agentes fuertes. Esta conducta es fácil de entender, ya que los agentes fuertes no deben esforzarse mayormente para ganar la subasta, mientras que un agente débil deberá realizar una oferta bastante más agresiva si desea competir seriamente con el agente fuerte.

En el caso de asimetría entre oferentes es posible encontrar de todo tipo de ejemplos respecto al equilibrio, y en general no hay consecuencias estándares que se pudieran predecir al introducir esta nueva dimensión al análisis.

Finalmente, se concluye que es imposible predecir cualitativamente los efectos en el equilibrio de mercado al introducir al análisis la asimetría entre los oferentes.

V.8. Advertencia acerca de tópicos sensibles

La presente tesis ha presentado un análisis basado principalmente en los resultados de los modelos matemáticos ideales aplicados al mercado chileno, el cual también se ha idealizado en cierta medida. Dicho análisis se puede extender de manera indeterminada si se consideran sólo algunas de las miles de variables más que puede incluir el problema real.

⁷¹ Se entiende por agente *débil* a aquel individuo que tiene una valoración probablemente más alta que otro individuo denominado agente *fuerte*.

Sólo por citar algunos ejemplos, se podría considerar los efectos nocivos en la competencia que causaría la integración vertical que presenta el mercado chileno, o la posible colusión que se puede producir dado el bajo número de holding participantes en la industria de la generación.

En general, existen básicamente dos mecanismos para mitigar posibles conductas anti-competitivas. Uno de estos es directamente a través del diseño de la subasta y el otro actúa en forma indirecta a través de una vigilancia permanente de autoridades anti-monopolio. En Inglaterra este último mecanismo parece haber sido muy efectivo para disciplinar las ofertas de las únicas dos empresas generadoras relevantes²⁴. En relación al primer mecanismo, no existen evidencias claras acerca de cuál modelo de subasta es menos sensible a los acuerdos colusivos. Por lo tanto, es recomendable contar con medidas externas a los mecanismos de casación propiamente tal, que resguarden la libre competencia.

Otro de los efectos negativos que suelen aparecer en este tipo de mecanismos de mercado es el aprendizaje de los agentes. Las subastas repetidas suelen *enseñarles* a los agentes la forma en que ellos deben comportarse para obtener altas ganancias, existiendo acuerdos colusivos tácitos entre los oferentes.

VI. CONCLUSIONES

La presente tesis ha desarrollado un análisis tanto cualitativo como cuantitativo a diferentes esquemas de subastas que se pueden aplicar al mercado eléctrico nacional en el marco de la nueva Ley N° 20.018. Este análisis permite no sólo una comparación entre el comportamiento de los agentes y del mercado en general entre los distintos esquemas de licitación, sino que también permite analizar tempranamente los elementos básicos del nuevo marco regulatorio.

La base del análisis cuantitativo presentado en este trabajo es la modelación de distintos formatos de subasta utilizando la teoría de juegos, y específicamente la teoría bayesiana. A pesar que los modelos matemáticos son propios del autor de esta tesis, éstos están fuertemente influenciados por los clásicos modelos de subastas de valor común y por los modelos de subasta multiproducto.

Por otro lado, el análisis cualitativo mostrado en el trabajo es producto de una completa investigación bibliográfica, la cual se basa en recientes publicaciones respecto al tema⁷².

Los resultados que se pueden extraer de la investigación presentada en este documento se pueden resumir en las siguientes conclusiones enumeradas a continuación:

- Si los distribuidores llaman a licitaciones para negociar contratos de abastecimiento en la cual no se permiten ofertas parciales por sub-bloques de demanda, entonces un mecanismo de licitación de sobre cerrado de segundo precio les permite alcanzar precios levemente más bajos que un mecanismo de licitación de primer precio, a pesar, que la estrategia de oferta de los generadores cambia categóricamente.

⁷² Gran parte de los conocimientos básicos necesarios para la elaboración de esta tesis fueron proporcionados por los textos: Krishna, V. (2002) *Auction Theory* y Fundenberg, D. y Tirole, J. (1991) *Game Theory*, mientras que los conocimientos específicos fueron proporcionados por la bibliografía detallada al final de este documento.

- En una licitación de sobre cerrado de primer precio por un bloque indivisible de demanda, los generadores se ven incentivados a realizar ofertas por sobre sus expectativas de valor del precio spot futuro, revelando su rentabilidad esperada. Por otro lado, en una licitación de segundo precio los generadores se ven incentivados a realizar ofertas iguales a sus expectativas de valor del precio spot futuro.
- La presencia de un precio de reserva afecta la eficiencia del mecanismo y el equilibrio del mismo, dado que eleva la probabilidad que la subasta se declare desierta. Sin embargo, el precio de reserva no afecta mayormente la estrategia de oferta de los generadores.
- Si bien, un precio de reserva bajo permite mantener controlados los precios de equilibrio de los mecanismos, esto puede incurrir en un alto costo social dado que, con alta probabilidad de ocurrencia, las distribuidoras no negociarían contratos de abastecimiento. Por lo tanto, existe un precio de reserva óptimo el cual permite la existencia de bajos niveles tanto del precio de equilibrio como de la probabilidad de desabastecimiento contractual.
- Los precios de equilibrio de todos los mecanismos de licitaciones analizados son más competitivos a mayor cantidad de oferentes. Por lo tanto, se debe tener especial cuidado con que el proceso real sea efectivamente no-discriminatorio.
- En el caso donde los generadores actúan coludidos a nivel de holding resulta un mayor nivel de precios que en el caso donde cada empresa actúa como un individuo independiente. Este hecho se presenta dado que la colusión tiene un efecto neto equivalente sobre el número de participantes de la licitación.
- En igualdad de condiciones de mercado (igual número de competidores, alta capacidad de contratación de los generadores) una subasta pay-as-bid por un bloque indivisible convocada por un solo distribuidor despeja los mismos niveles de precio que una subasta pay-as-bid por un bloque divisible. Sin embargo, generalmente una subasta por un bloque divisible presenta mejores condiciones

de mercado (principalmente en el número de competidores), lo que permite alcanzar mejores precios para el consumidor final. Las condiciones favorables de mercado de una subasta respecto a la otra se deben principalmente a la entrada de pequeños productores a la competencia en el caso de una licitación por un bloque de demanda divisible.

- En igualdad de condiciones de mercado (igual número de competidores, alta capacidad de contratación) una subasta de sobre cerrado pay-as-bid coordinada entre dos distribuidores despeja los mismos niveles de precio que las subastas realizadas independientemente por cada distribuidor. Sin embargo, generalmente una subasta por un gran bloque divisible de demanda agregada presenta mejores condiciones de mercado (principalmente en el número de competidores), lo que permite alcanzar mejores precios para el consumidor final. Las condiciones favorables de mercado de una subasta respecto a la otra se deben principalmente a la entrada de nuevos inversionistas extranjeros a la competencia en el caso de una licitación por un gran bloque de demanda divisible.
- Se observó que el fenómeno de la maldición del ganador está presente en todos los mecanismos de licitaciones, por lo que los generadores deben ser bastante cauteloso en la estimación del precio spot futuro.
- Los participantes de la subasta se protegen del riesgo de valor común, fundamentalmente realizando ofertas más altas.
- Para concretizar un proceso de licitación exitoso, las distribuidoras deben considerar dos objetivos básicos al momento de diseñar sus bases de licitación, éstos son:
 - Diseñar un mecanismo que permita obtener contratos a precios cercanos al costo marginal de generación.
 - Diseñar un mecanismo que permita adjudicar el contrato al generador más eficiente, es decir, a aquel generador capaz de abastecer el suministro licitado de la manera más económica.

Para esto, es recomendable que los distribuidores estudien bien el problema particular de cada uno, de manera de ajustar un mecanismo apropiado a su realidad. Sin embargo, a lo largo del presente trabajo de investigación es posible identificar dos aspectos fundamentales a considerar en cada diseño de subastas de contratos de abastecimiento, éstos son:

- Utilizar licitaciones del tipo multi-producto por sobre las licitaciones del tipo uni-producto. Esto permite a los distribuidores aceptar ofertas por cualquier cantidad de energía y no sólo por el bloque total licitado.
- Actuar de manera coordinada, de manera de agregar la demanda de un conjunto de distribuidoras para permitir un mayor nivel de competencia en la licitación.

Si bien, se ha analizado a lo largo del presente documento el beneficio de estas consideraciones, no es claro que las distribuidoras estén incentivadas a ejecutarlas, considerando que éstas realizan un pass-through de los precios de generación hacia el consumidor final⁷³.

- Finalmente, y a nivel de crítica se concluye que la hipótesis de este trabajo es aceptada. Si bien, no existen grandes diferencias entre los niveles de precios de los equilibrios de mercado para los mecanismos uniproducción, sí se pronostican notables diferencias entre los precios de éstas y las subastas multiproducción, dado que las últimas minimizan las barreras de participación en la licitación tanto de grandes inversionistas como de pequeños productores existentes en el mercado, lo que permite un mayor número de oferentes, variable fundamental para obtener precios bajos. Por esta razón, se considera negativo que la legislación no haya establecido desde un comienzo la obligatoriedad de ciertas reglas básicas acerca del mecanismo de licitación a utilizar, como por ejemplo, establecer que siempre

⁷³ Si bien, existe un pequeño beneficio de conseguir precios bajos en el proceso de licitación con el fin de obtener un mayor volumen de ventas, éste se considera menor dada la pequeña elasticidad de la demanda eléctrica.

se deben aceptar ofertas parciales de abastecimiento, tal como lo realizara el regulador del mercado eléctrico colombiano.

VI.1. Desarrollos Futuros

El presente trabajo de investigación tiene un supuesto bastante fuerte referente al valor común del precio spot futuro. Si bien, esta es una variable importante a considerar, existen otras que también deben influir en el precio a ofertar por un generador en una licitación. Estas otras variables, probablemente de origen privado como el costo de producción de cada generador, convierten el análisis presentado no en uno de valor puramente común, sino que en uno de valor casi-común o valor común-y-privado. Por lo tanto, se pueden estudiar otras variables de valor privado que afectan en la decisión de ofertar en una subasta y así describir situaciones, como por ejemplo, donde existen incentivos para realizar ofertas bajo el precio spot esperado.

Otras de las líneas futuras que se pueden desprender de este trabajo, es la decisión estratégica de los generadores acerca de cuanta cantidad ofertar. En el presente análisis se describieron principalmente situaciones y comportamientos ocurridos durante el proceso de subasta, pero no se analizaron dediciones precedentes a éstas, como por ejemplo cuanto debe ser la cantidad a ofertar según las políticas de diversificación (o nivel óptimo de contratación) que posea la firma.

El análisis presentado en esta tesis está enfocado, principalmente, a comparar los distintos esquemas de subasta y describir el comportamiento estratégico que adoptan los oferentes, más que a revelar el verdadero valor de equilibrio de la licitación. Por lo tanto, sería pertinente incorporar algunas variables extras que permitan describir mejor las reales condiciones de asimetría y aversión al riesgo de los generadores para modelaciones más precisas.

BIBLIOGRAFIA

- ASHENFELTER, O. (1989) How Auctions Work for Wine and Art, *Journal of Economics Perspectives*, 3,3.
- BAMPTON, H. (1994) Solving Imperfect Information Games Using the Monte Carlo Heuristic, A Thesis Presented for the Master of Science Degree, The University of Tennessee, Knoxville.
- BIKHCHANDANI, S AND RILEY, J. (1991) Equilibria in Open Common Value Auction, *Journal of Economic Theory*, 53, 101-130.
- BINMORE, K., HENRIK VON DER FEHR, N. Y HARBORD, D. (2004) Comments on the Proposed Electricity Contract Auctions in Brazil.
- CAI, G. Y WURMAN P. (2005) Monte Carlo Aproximation in Incomplete Information, *Sequential Auction Games, Decision Support System*, 39, 153-168.
- CAPEN, E., CLAPP, R. y CAMPBELL, W. (1971) Competitive Bidding in High-Risk Situations, *Journal of Petroleum Technology*, 23, 641-653.
- CNE (2005) Fijación de Precio Nudo Abril de 2005 Sistema Interconectado Central.
- CNE (2005) Resolución Exenta N° 611.
- DFL N°1 (1982) Ley General de Servicios Eléctricos, Ministerio de Economía Fomento y Reconstrucción de Chile.
- ENGELBRECHT-WIGGANS, R. y KAHN, C. (1998) Multi Unit Pay-Your-Bid Auctions with Variable Rewards, *Games and Economic Behavior*, 23, 25-42.
- FISHER, R. (2000) Apuntes del Curso Organización Industrial, Universidad de Chile.
- FREITAS, C. (2004) Recent Auction was not Good at All for CIG, www.yeald.com

FUDENBERG, D. Y TIROLE, J. (1991) Game Theory, the MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

HARSANYI, J (1967-68) Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, Management Science, 14, 159-182, 320-334, 486-502.

HOLENSTEIN, R. (2005) Using Sampling to Compute Bayes-Nash Equilibrium in Auction Games, CPSC 532A Course Project, Department of Computer Science, University of British Columbia, Vancouver.

KLEMPERER, P. (1998) Auctions With Almost Common Values, European Economic Review, 42, 757-769.

KEMPLERER, P. (1999) Auction Theory: A Guide to the Literature, Journal of Economic Surveys, 13(3), 227-286.

KRISHNA, V. (2002) Auction Theory, Academic Press, San Diego, California.

LEY N° 20.018 (2005) Modificaciones a la ley DFL N°1, Ministerio de Economía Fomento y Reconstrucción de Chile.

MASKIN, E. (1992) Auctions and Privatizations, in H. Siebert (ed.), Privatization, Kiel: Institut fur Weltwirtschaften der Universität Kiel, 115-136

MILGROM, P. Y WEBER, R. (1982) A Theory of Auction and Competitive Bidding, Econometrica, 50, 1089-1122.

MYERSON, R. (1981) Optimal Auction Design, Mathematics of Operation Research, 6, 58-73.

NASH, J. (1950) Equilibrium Points in N-Person Games, Proceedings of the National Academy of Science, 36, 48-49.

OSINERG (2005) Proyecto de Ley para Promover el Desarrollo Eficiente de la Generación Eléctrica, Gobierno de Perú.

PSR (2004) Brazilian Power Sector: The New Regulatory Framework.

REEVES, D. y WELLMAN, M. (2004) Computing Best-Response Strategies in Infinite Games of Incomplete Information

RILEY, J. Y SAMUELSON, W. (1981) Optimal Auctions, American Economic Review, 71, 381-392.

STACHETTI, E. (1999) Auction Design for the Colombian Electricity Market, Mimeo, U. of Michigan.

STREET, A., CAHUANO, J., GRANVILLE, S., ROSENBLATT, J., THOMÉ, L., BARROSO, L., PEREIRA, M., KELMAN, R., FARIA, E., VEIGA, A. (2005) Estratégias de atuação de Agentes Geradores sob Incerteza em Leilões de Contratos de Energia Elétrica, SNPTEE Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica.

SYSTEP (2005) Análisis de Proyecto de Ley Destinado a Asegurar el Desarrollo Eficiente de la Generación Eléctrica, www.systep.cl.

VÁZQUEZ, C. (2003) Modelos de Casación de Ofertas en Mercados Eléctricos, Tesis para la Obtención del Grado de Doctor, Universidad de Comillas, España.

VILLAR, J. (2002) Simulador de un Mercado Hidrotérmico Utilizando Teoría de Juegos, Tesis para optar al grado de Magister en Ciencias de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.

WILSON, R. (1969) Competitive Bidding with Disparate Information, Management Science, 15, 446-448.

WILSON, R. (1977) A Bidding Model of Perfect Competition, Review of Economic Studies, 44, 511-518.

WOLFRAM, C. (1999) Should the Rest of the World Adopt the United Kingdom's reforms?, Regulation: The Cato Review of bussiness and Government, Vol. 22. N° 4, Washington.

ANEXOS

ANEXO A: DATOS DE ENTRADA DE LOS MODELOS

Como se menciona en el cuerpo de este informe, los datos utilizados para la elaboración del mismo son los publicados por la Comisión Nacional de Energía en el mes de abril 2005. A continuación, en la Tabla A- 1 se muestra la proyección del costo marginal [US\$/MWh] y la cantidad de energía demandada [GWh] para la barra Cerro Navia 220.

Tabla A- 1: Proyección de costos marginales y demanda para nodo Cerro Navia 220 CNE

Año	EtaTip	EtaNom	BarNom	Cmg [US/MWh]	E [GWh]	Q=E/4 [GWh]
2006	EtaMes	MesEne	Cerro Navia 220	98.92	694.47	173.62
2006	EtaMes	MesFeb	Cerro Navia 220	118.11	662.40	165.60
2006	EtaMes	MesMar	Cerro Navia 220	143.99	740.03	185.01
2007	EtaMes	MesAbr	Cerro Navia 220	132.21	687.30	171.82
2007	EtaMes	MesMay	Cerro Navia 220	115.41	679.60	169.90
2007	EtaMes	MesJun	Cerro Navia 220	99.20	672.65	168.16
2007	EtaMes	MesJul	Cerro Navia 220	113.45	711.74	177.94
2007	EtaMes	MesAgo	Cerro Navia 220	93.55	710.11	177.53
2007	EtaMes	MesSep	Cerro Navia 220	106.10	665.72	166.43
2007	EtaMes	MesOct	Cerro Navia 220	69.42	693.87	173.47
2007	EtaMes	MesNov	Cerro Navia 220	72.39	690.86	172.72
2007	EtaMes	MesDic	Cerro Navia 220	76.68	752.90	188.23
2007	EtaMes	MesEne	Cerro Navia 220	88.87	745.10	186.27
2007	EtaMes	MesFeb	Cerro Navia 220	105.47	710.69	177.67
2007	EtaMes	MesMar	Cerro Navia 220	138.76	793.90	198.48
2008	EtaMes	MesAbr	Cerro Navia 220	131.29	737.42	184.35
2008	EtaMes	MesMay	Cerro Navia 220	118.18	729.10	182.28
2008	EtaMes	MesJun	Cerro Navia 220	103.72	721.60	180.40
2008	EtaMes	MesJul	Cerro Navia 220	111.40	763.44	190.86
2008	EtaMes	MesAgo	Cerro Navia 220	95.33	761.92	190.48
2008	EtaMes	MesSep	Cerro Navia 220	104.42	714.46	178.62
2008	EtaMes	MesOct	Cerro Navia 220	48.29	744.57	186.14
2008	EtaMes	MesNov	Cerro Navia 220	47.42	741.42	185.35
2008	EtaMes	MesDic	Cerro Navia 220	50.43	808.07	202.02
2008	EtaMes	MesEne	Cerro Navia 220	53.16	799.14	199.78
2008	EtaMes	MesFeb	Cerro Navia 220	71.24	762.24	190.56
2008	EtaMes	MesMar	Cerro Navia 220	96.42	851.44	212.86
2009	EtaMes	MesAbr	Cerro Navia 220	87.29	790.93	197.73
2009	EtaMes	MesMay	Cerro Navia 220	76.19	781.96	195.49
2009	EtaMes	MesJun	Cerro Navia 220	57.32	773.88	193.47
2009	EtaMes	MesJul	Cerro Navia 220	64.63	818.68	204.67
2009	EtaMes	MesAgo	Cerro Navia 220	49.71	817.23	204.31
2009	EtaMes	MesSep	Cerro Navia 220	50.40	766.44	191.61
2009	EtaMes	MesOct	Cerro Navia 220	47.60	798.68	199.67

2009	EtaMes	MesNov	Cerro Navia 220	46.11	795.34	198.84
2009	EtaMes	MesDic	Cerro Navia 220	49.68	866.89	216.72
2009	EtaMes	MesEne	Cerro Navia 220	42.83	851.91	212.98
2009	EtaMes	MesFeb	Cerro Navia 220	56.14	812.57	203.14
2009	EtaMes	MesMar	Cerro Navia 220	76.15	907.66	226.91
2010	EtaMes	MesAbr	Cerro Navia 220	66.22	843.16	210.79
2010	EtaMes	MesMay	Cerro Navia 220	60.73	833.59	208.40
2010	EtaMes	MesJun	Cerro Navia 220	46.53	824.97	206.24
2010	EtaMes	MesJul	Cerro Navia 220	54.05	872.72	218.18
2010	EtaMes	MesAgo	Cerro Navia 220	47.69	871.20	217.80
2010	EtaMes	MesSep	Cerro Navia 220	37.81	817.09	204.27
2010	EtaMes	MesOct	Cerro Navia 220	34.57	851.43	212.86
2010	EtaMes	MesNov	Cerro Navia 220	33.53	847.89	211.97
2010	EtaMes	MesDic	Cerro Navia 220	34.20	924.18	231.04
2010	EtaMes	MesEne	Cerro Navia 220	34.81	908.17	227.04
2010	EtaMes	MesFeb	Cerro Navia 220	40.02	866.23	216.56
2010	EtaMes	MesMar	Cerro Navia 220	50.20	967.59	241.90
2011	EtaMes	MesAbr	Cerro Navia 220	44.55	898.84	224.71
2011	EtaMes	MesMay	Cerro Navia 220	40.89	888.64	222.16
2011	EtaMes	MesJun	Cerro Navia 220	41.26	879.44	219.86
2011	EtaMes	MesJul	Cerro Navia 220	41.13	930.32	232.58
2011	EtaMes	MesAgo	Cerro Navia 220	42.56	928.74	232.18
2011	EtaMes	MesSep	Cerro Navia 220	36.88	871.08	217.77
2011	EtaMes	MesOct	Cerro Navia 220	30.68	907.68	226.92
2011	EtaMes	MesNov	Cerro Navia 220	30.39	903.91	225.98
2011	EtaMes	MesDic	Cerro Navia 220	32.97	985.25	246.31
2011	EtaMes	MesEne	Cerro Navia 220	34.09	967.20	241.80
2011	EtaMes	MesFeb	Cerro Navia 220	38.84	922.54	230.63
2011	EtaMes	MesMar	Cerro Navia 220	46.22	1,030.48	257.62
2012	EtaMes	MesAbr	Cerro Navia 220	42.75	957.26	239.32
2012	EtaMes	MesMay	Cerro Navia 220	37.00	946.40	236.60
2012	EtaMes	MesJun	Cerro Navia 220	45.25	936.60	234.15
2012	EtaMes	MesJul	Cerro Navia 220	42.32	990.79	247.70
2012	EtaMes	MesAgo	Cerro Navia 220	41.49	989.11	247.28
2012	EtaMes	MesSep	Cerro Navia 220	37.99	927.70	231.92
2012	EtaMes	MesOct	Cerro Navia 220	33.22	966.68	241.67
2012	EtaMes	MesNov	Cerro Navia 220	32.79	962.66	240.67
2012	EtaMes	MesDic	Cerro Navia 220	36.06	1,049.29	262.32
2012	EtaMes	MesEne	Cerro Navia 220	36.16	1,030.07	257.52
2012	EtaMes	MesFeb	Cerro Navia 220	41.68	982.50	245.63
2012	EtaMes	MesMar	Cerro Navia 220	50.81	1,097.46	274.36
2013	EtaMes	MesAbr	Cerro Navia 220	51.03	1,019.49	254.87
2013	EtaMes	MesMay	Cerro Navia 220	43.92	1,007.91	251.98
2013	EtaMes	MesJun	Cerro Navia 220	47.21	997.48	249.37
2013	EtaMes	MesJul	Cerro Navia 220	37.11	1,055.19	263.80
2013	EtaMes	MesAgo	Cerro Navia 220	36.00	1,053.40	263.35
2013	EtaMes	MesSep	Cerro Navia 220	36.74	988.00	247.00
2013	EtaMes	MesOct	Cerro Navia 220	31.09	1,029.51	257.38

2013	EtaMes	MesNov	Cerro Navia 220	31.46	1,025.24	256.31
2013	EtaMes	MesDic	Cerro Navia 220	35.44	1,117.49	279.37
2013	EtaMes	MesEne	Cerro Navia 220	36.48	1,097.02	274.26
2013	EtaMes	MesFeb	Cerro Navia 220	42.55	1,046.36	261.59
2013	EtaMes	MesMar	Cerro Navia 220	52.53	1,168.79	292.20
2014	EtaMes	MesAbr	Cerro Navia 220	50.21	1,085.75	271.44
2014	EtaMes	MesMay	Cerro Navia 220	42.74	1,073.43	268.36
2014	EtaMes	MesJun	Cerro Navia 220	47.64	1,062.32	265.58
2014	EtaMes	MesJul	Cerro Navia 220	45.43	1,123.78	280.95
2014	EtaMes	MesAgo	Cerro Navia 220	40.84	1,121.87	280.47
2014	EtaMes	MesSep	Cerro Navia 220	42.91	1,052.22	263.05
2014	EtaMes	MesOct	Cerro Navia 220	34.73	1,096.43	274.11
2014	EtaMes	MesNov	Cerro Navia 220	37.27	1,091.88	272.97
2014	EtaMes	MesDic	Cerro Navia 220	44.46	1,190.13	297.53
2014	EtaMes	MesEne	Cerro Navia 220	41.77	1,168.33	292.08
2014	EtaMes	MesFeb	Cerro Navia 220	60.91	1,114.38	278.59
2014	EtaMes	MesMar	Cerro Navia 220	76.09	1,244.77	311.19
2015	EtaMes	MesAbr	Cerro Navia 220	74.03	1,156.33	289.08
2015	EtaMes	MesMay	Cerro Navia 220	64.82	1,143.20	285.80
2015	EtaMes	MesJun	Cerro Navia 220	65.91	1,131.37	282.84
2015	EtaMes	MesJul	Cerro Navia 220	58.66	1,196.83	299.21
2015	EtaMes	MesAgo	Cerro Navia 220	49.45	1,194.79	298.70
2015	EtaMes	MesSep	Cerro Navia 220	54.77	1,120.61	280.15
2015	EtaMes	MesOct	Cerro Navia 220	37.00	1,167.70	291.92
2015	EtaMes	MesNov	Cerro Navia 220	39.53	1,162.85	290.71
2015	EtaMes	MesDic	Cerro Navia 220	49.63	1,267.49	316.87

Según la información proporcionada por la Tabla A- 1, al calcular la cuota anual equivalente para el precio spot, resulta:

$$P_s = \frac{\sum_{t=1}^{108} \frac{P_s^t \times Q^t}{(1 + 0,7974\%)^t}}{\sum_{t=1}^{108} \frac{Q^t}{(1 + 0,7974\%)^t}} = 60,17 \quad [\text{US\$}/\text{MWh}]$$

En el cálculo de la cuota anterior, se ha utilizado una tasa de descuento de 10% anual o equivalentemente 0,7974% mensual.

Este valor esperado presenta una volatilidad debido, principalmente, a la fuerte componente hidrológica del SIC y a la incertidumbre propia del sistema, la cual está en función de otras volatilidades, tales como la de los precios de combustibles o de tecnologías futuras de generación (GNL).

Así, se ha considerado que la cuota anual equivalente puede variar hasta un valor crítico de 15 [US\$/MWh], según una distribución normal $N(60,17 ; \sigma)$.

Si bien, el precio spot tiene oscilaciones muy agudas, la cuota anual equivalente⁷⁴, dada su estructura, es más estable. La Figura A- 1 ilustra la oscilación del costo marginal para la barra Cerro Navia 220 junto con su valor medio.

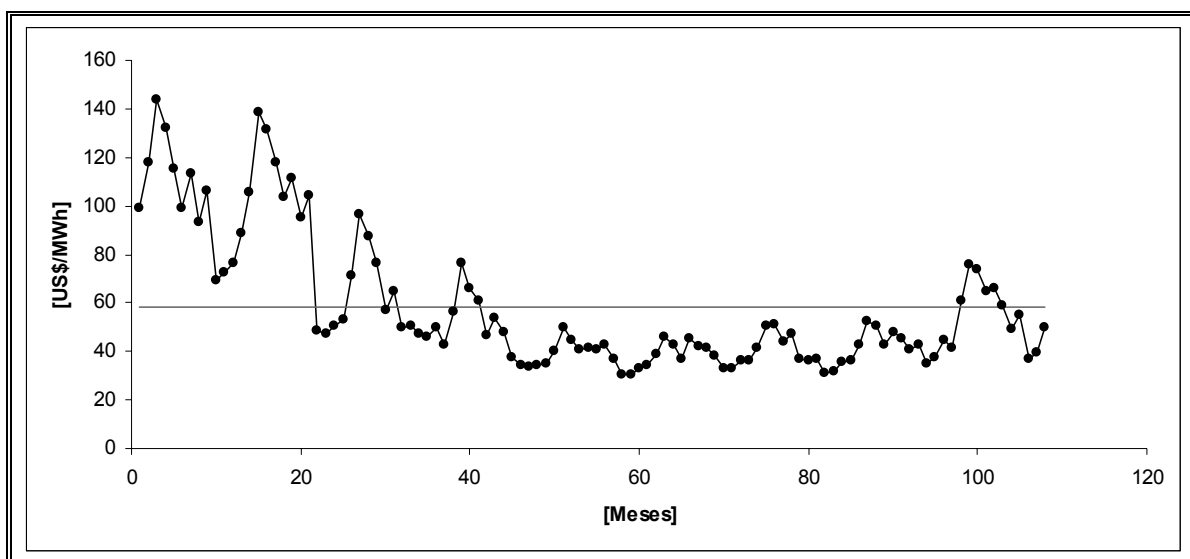


Figura A- 1: Proyección del costo marginal barra Cerro Navia 220

Para estimar la oscilación de la cuota, se consideraron dos escenarios límite (uno muy caro y otro muy económico) que tengan una muy baja probabilidad de ocurrencia. Luego, éstos permitirán fijar (heurísticamente) el valor $\pm 3\sigma$ de las colas de la distribución normal. A continuación, la Figura A- 2 muestra la proyección de los costos marginales y de las respectivas cotas estimadas.

⁷⁴ La cuota anual equivalente se puede entender muy informalmente como: un promedio ponderado donde *pesan* más lo primeros años.

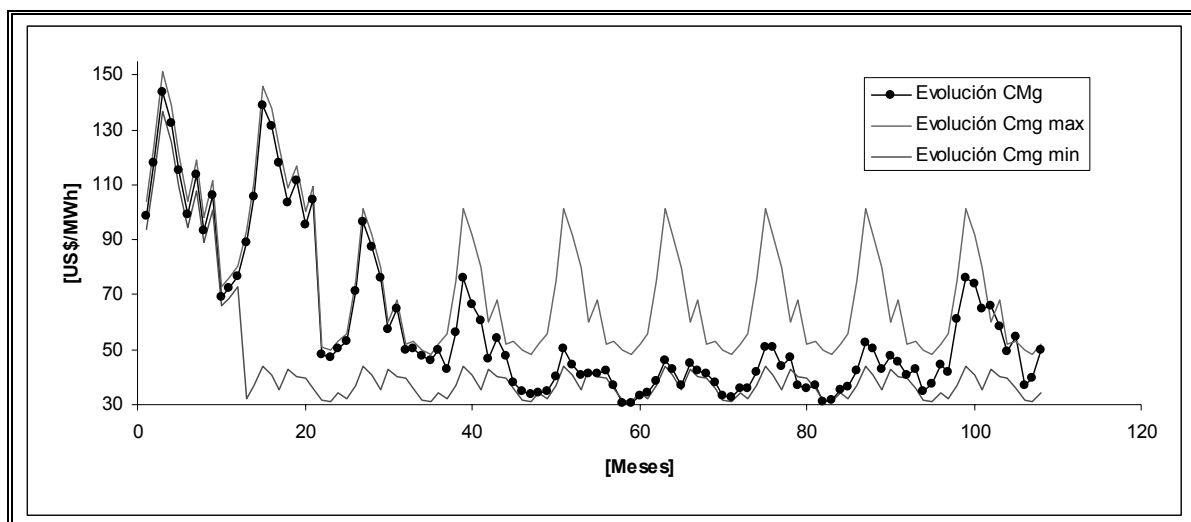


Figura A- 2: Proyección del costo marginal y cotas para la barra Cerro Navia 220

Para elaborar la cota superior, se aumentó en 5% el nivel de precio para los tres primeros años (los más caros), y luego se consideró que el precio se mantenía constante (conservando estacionalidad) e igual al precio del año tres (2009) para el resto del periodo.

Para elaborar la cota inferior, se disminuyó en un 5% el nivel de precios para el primer año, y luego se consideró un precio constante (conservando estacionalidad) 5% más bajo que el precio del año más económico.

Se puede observar que el nivel de precios para el año 2007 se considera estable dentro de una banda de $\pm 5\%$.

Finalmente, la cuota anual equivalente tanto para el escenario inferior como para el escenario superior es de 44,8 y 75,5 [US\$/MWh] respectivamente⁷⁵. Para este estudio se ha considerado que estos valores son muy poco probables, por lo que se puede asumir una desviación estándar para la cuota anual equivalente de $\sigma = 5$ [US\$/MWh].

⁷⁵ Considerando las mismas cantidades demandadas y tasa del 10% anual.

ANEXO B: ESTUDIO DE LA RAZÓN HAZARD

Existen muchas maneras en las que se puede expresar el hecho que una función de probabilidad F es *más grande* que una función de probabilidad G . Especialmente, el presente Anexo estudia dos maneras que son muy utilizadas en teoría de subastas: la dominancia de primer orden y la dominancia en la razón de Hazard.

Dominancia de primer orden:

Dadas dos funciones de probabilidad F y G definidas en $[0, \omega]$, se dice que F domina a G para todo $z \in [0, \omega]$, si:

$$F(z) \leq G(z)$$

Así, si se tienen las variables aleatorias X e Y que distribuyen según F y G respectivamente, entonces se dice que X domina a Y . Se puede observar fácilmente que la dominancia de primer orden implica que:

$$E\{X\} \geq E\{Y\}$$

Dominancia en la razón de Hazard:

Dada las definiciones anteriores, la razón de Hazard se define como:

$$\lambda(x) \equiv \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

donde $x \in [0, \omega)$

Así, si $\lambda_F(x) \leq \lambda_G(x)$ para todo $x \in [0, \omega)$, se dice que F domina a G en términos de la razón de Hazard.

Con la definición de la razón de Hazard, se puede ver que se cumple:

$$-\lambda(x) = \frac{d}{dx} \ln(1 - F(x))$$

Por lo tanto:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \lambda(t) dt\right)$$

Luego, si F domina a G en términos de la razón de Hazard, se tiene inmediatamente que:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \lambda_F(t) dt\right) \leq 1 - \exp\left(-\int_0^x \lambda_G(t) dt\right) = G(x)$$

Finalmente, si F domina a G en términos de la razón de Hazard, entonces también F domina a G en términos de primer orden.

Ejemplo:

En el punto IV.5 de este informe, se definieron las siguientes funciones de probabilidad condicionada:

$$H_i^1(\mu | x_i) = \Pr ob(B_i^1 \leq \mu | X_i = x_i) \quad y$$

$$H_i^2(\mu | x_i) = \Pr ob(B_i^2 \leq \mu | X_i = x_i)$$

Donde $\mathbf{B}_i = (B_i^1, B_i^2, \dots, B_i^N)$ con $B_i^j \leq B_i^{j+1}$ representa el vector de ofertas del resto de los individuos ordenadas de menor a mayor en el marco de un juego de subasta multiproducto de dos bloques. Dado que H_i^j representa la distribución de probabilidad de las ofertas correspondientes al bloque j, se tiene que H_i^2 domina estocasticamente (en primer orden) a H_i^1 , dado que para cualquier valor de μ se tiene que:

$$H_i^2(\mu | x_i) = \Pr ob(B_i^2 \leq \mu | X_i = x_i) \leq \Pr ob(B_i^1 \leq \mu | X_i = x_i) = H_i^1(\mu | x_i) \quad \forall \mu$$

Como ejemplo, se puede asumir que el individuo i espera que las ofertas del resto distribuyan normal, de tal manera que:

$$h_i^j(\mu | x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(\frac{-(\mu - \Gamma^j(x_i))^2}{2\sigma^2}\right)$$

Donde Γ^j representa la media de las ofertas para el bloque j en función de la información privada, y $\Gamma^j(x) \leq \Gamma^{j+1}(x)$ para todo x , con $\Gamma^j(x)$ creciente. Nótese que las ofertas por los bloques tienen la misma desviación estándar.

Luego, analizando un caso particular para un x_i fijo se puede asumir que:

$$h_i^1(\mu | x_i) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(\frac{-(\mu - 58)^2}{2 \times 5^2}\right)$$

$$h_i^2(\mu | x_i) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(\frac{-(\mu - 60)^2}{2 \times 5^2}\right)$$

La Figura B- 1 muestra el comportamiento de estas funciones:

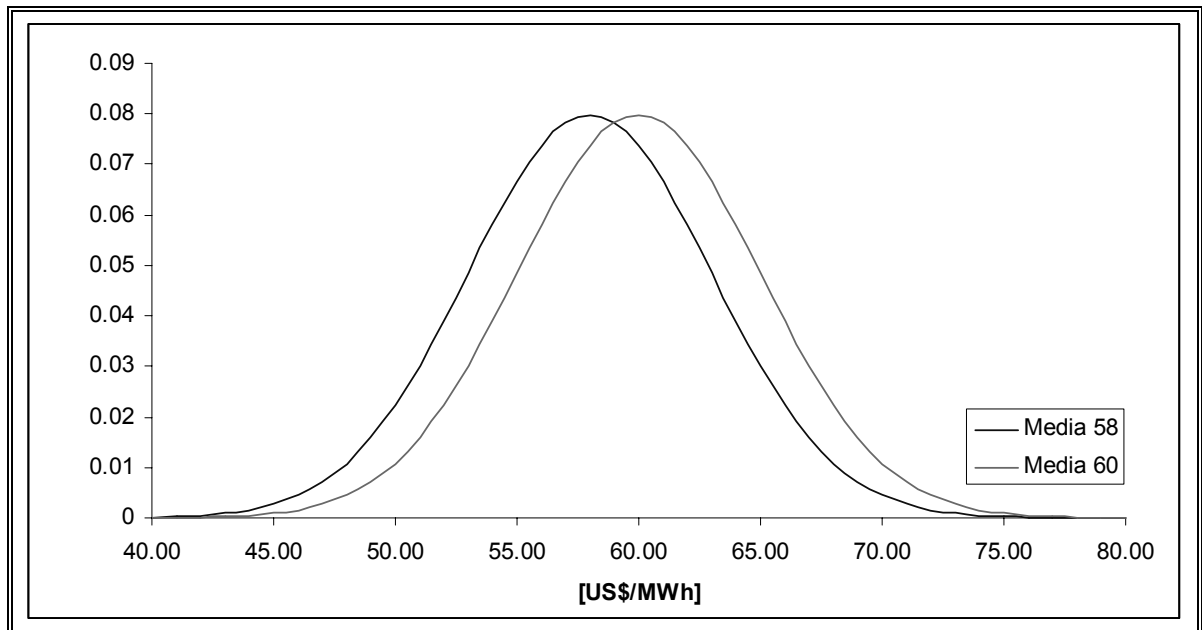


Figura B- 1: Densidad de probabilidad de ofertas por sub-bloques de licitación multiproducto

De la Figura B- 2 se puede ver que H_i^2 domina a H_i^1 en términos de primer orden

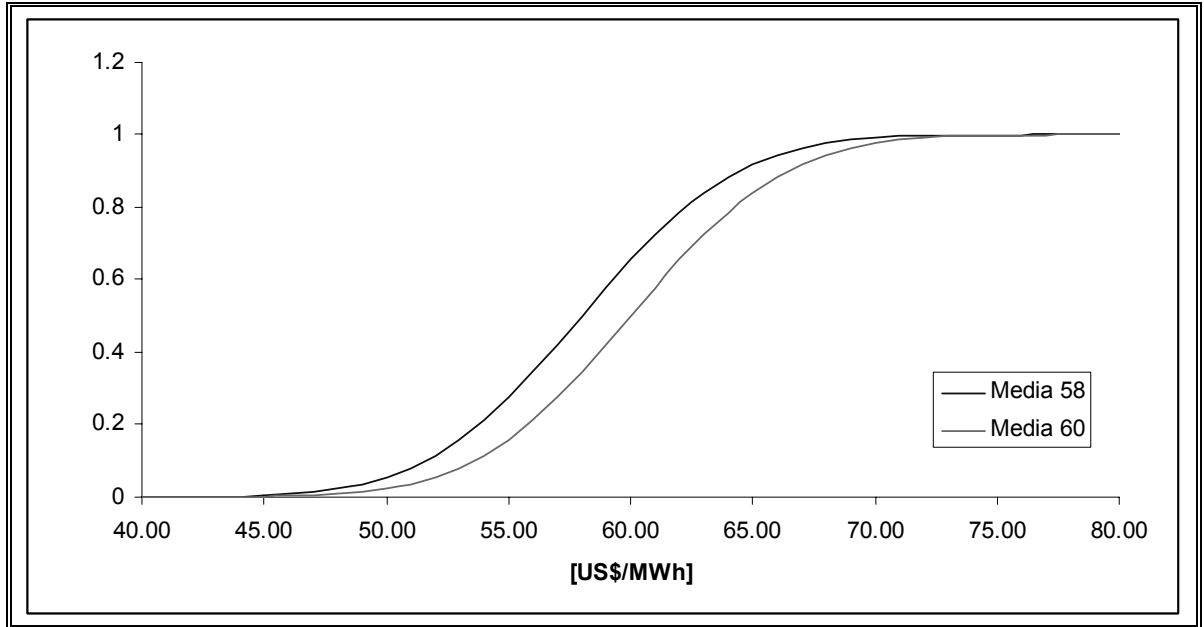


Figura B- 2: Función de probabilidad acumulada de ofertas por sub-bloques de licitación multiproducto

Con esto, se puede ver para este caso que también H_i^2 domina a H_i^1 en términos de la razón de Hazard (al menos para una vecindad de $\mu = 60$ [US\$/MWh]), tal como se muestra en la Figura B- 3:

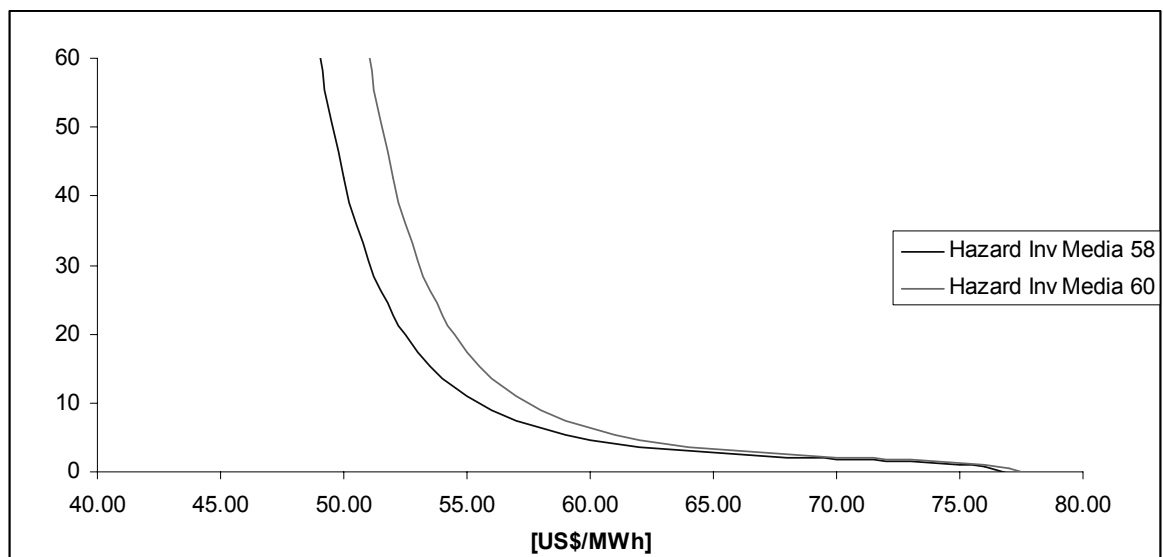


Figura B- 3: Funciones inversas de Hazard

Finalmente, para éste caso (nótese que los datos utilizados reflejan la realidad del caso chileno del SIC) se puede observar que el generador está incentivado a realizar ofertas planas $b_i^1 = b_i^2$, según lo que se demostró en el punto IV.5.

En general, se puede demostrar que la dominancia de primer orden es completamente equivalente a la dominancia en la razón de Hazard entre distribuciones normales de igual varianza. Este hecho se ilustra en la Figura B- 4 y la Figura B- 5

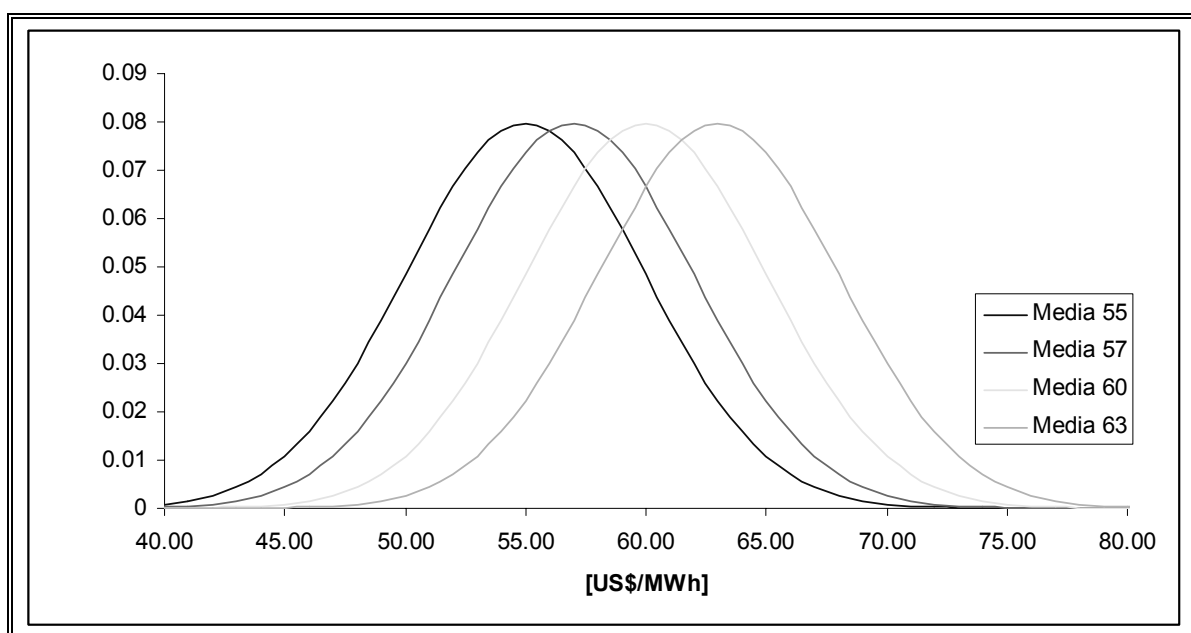


Figura B- 4: Funciones de densidad de probabilidad normal de igual varianza

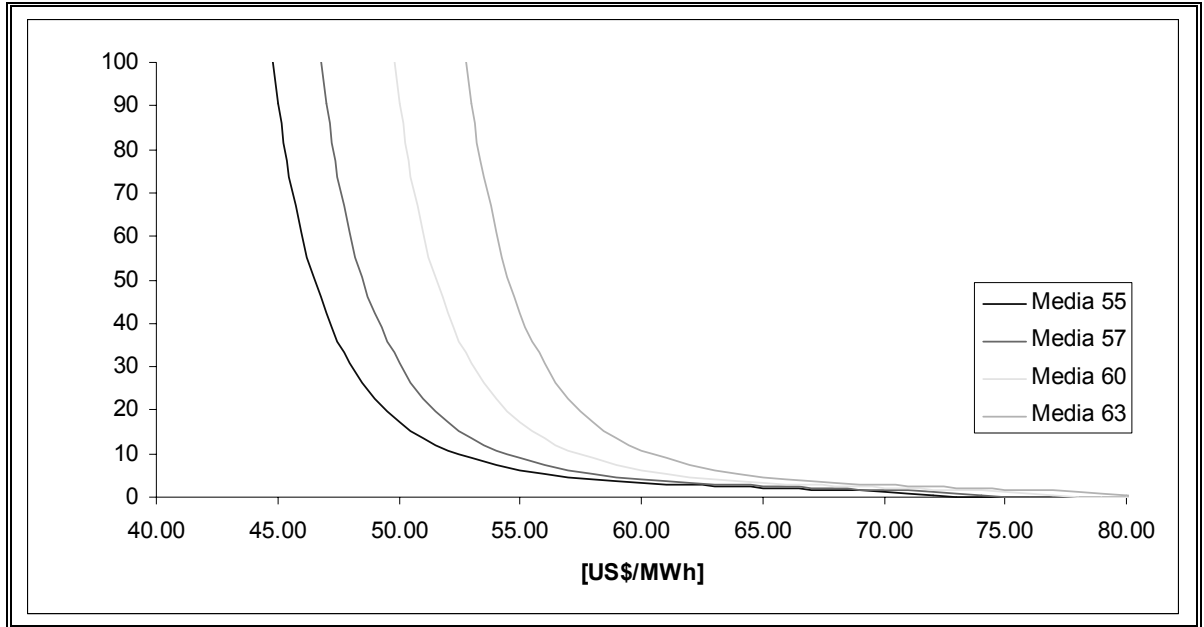


Figura B- 5: Funciones inversas de Hazard para funciones de probabilidad normal de varianza constante

ANEXO C: CONVERGENCIA DEL ALGORITMO NUMÉRICO

A continuación, se analizará la convergencia del método de diferencia finita el cual se utilizó para derivar la función estrategia desde una ecuación diferencial de primer orden.

La ecuación diferencial que se resolvió por método numérico es la que corresponde al comportamiento de los individuos dentro del juego de una licitación uniprodueto de primer precio sobre cerrado. La ecuación diferencial que representa la condición de primer orden del problema es:

$$0 = (Va(x_i) - \beta(x_i)) \times f_{Y_i|X_i}(x_i | x_i) + (1 - F_{Y_i|X_i}(x_i | x_i)) \frac{\partial \beta(x_i)}{\partial x_i}$$

$$\text{con condición de borde } \beta(Va^{-1}(\text{Pr})) = \text{Pr}$$

La cual se resuelve en un dominio discretizado como:

$$\beta[i-1] = \beta[i] + \frac{\Delta x}{F_1[i]} (F_2[i] \times \beta[i] + F_3[i])$$

$$\text{con condición de borde } \beta[i_r] = Va[i_r], \text{ en la cual } Va[i_r] = \text{Pr}$$

En general, dada la estructura de la ecuación diferencial lineal, se puede demostrar que las iteraciones en el sentido $-x_i$ son altamente estables y siempre convergen a la misma asíntota para cualquier condición de borde. De hecho, la asíntota es una función de similar forma que $Va(x_i)$ o por lo menos sobre $Va(x_i)$. Esto explica el hecho que las estrategias de ofertas no cambien mayormente para diferentes valores de Pr , ya que convergen⁷⁶ a la misma asíntota.

La estructura general de la ecuación diferencial en estudio es de la forma:

$$0 = (Va(x) - \beta(x)) \times f_1(x) + (1 - f_2(x)) \frac{\partial \beta(x)}{\partial x_i}$$

⁷⁶ Convergen en el sentido $-x_i$. Formalmente hablando, la ecuación diferencial tiene una *fente* de forma similar a $Va(x_i)$

Donde:

$Va(x)$ es una función de forma arbitraria definida para todo $x \in [\alpha, \beta]$.

$f_1(x)$ es una función positiva para todo $x \in [\alpha, \beta]$.

$f_2(x)$ es una función positiva y acotada para todo $x \in [\alpha, \beta]$ con $0 \leq f_2(x) \leq 1$

A continuación se muestran algunos experimentos numéricos que ilustran la aseveración anterior:

Ejemplo 1:

$$Va(x) = \frac{x^2}{100} + \frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = \frac{x}{10}$$

$$[\alpha, \beta] = [0, 10]$$

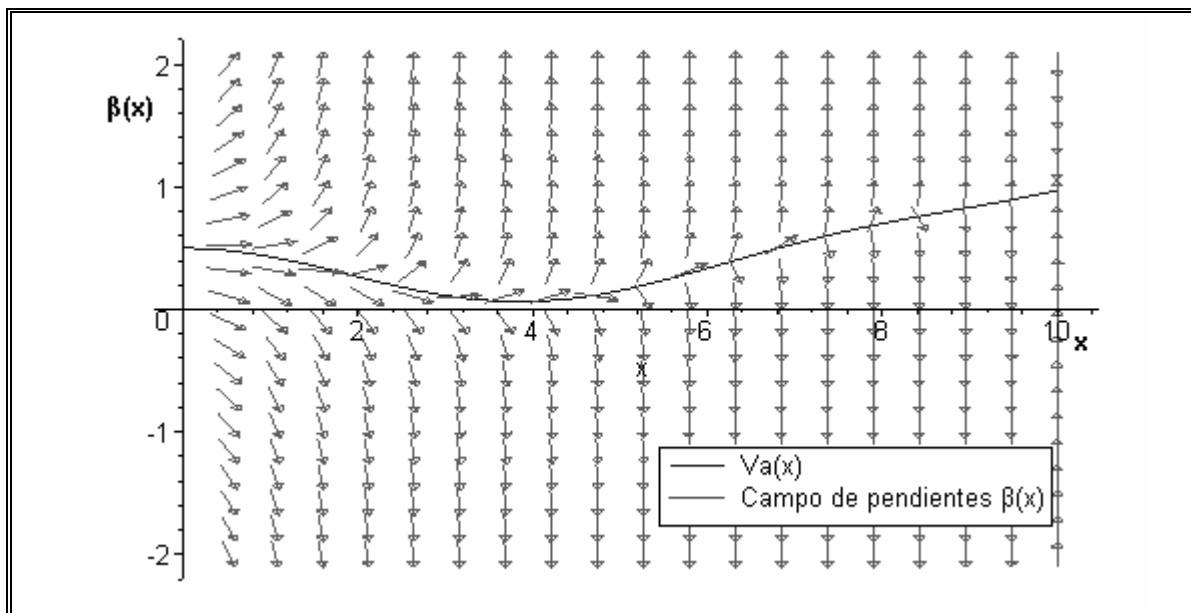


Figura C- 1: Experimento numérico N° 1

Ejemplo 2:

$$Va(x) = \sqrt{x}$$

$$f_1(x) = x$$

$$f_1(x) = \frac{x}{10}$$

$$[\alpha, \beta] = [0, 10]$$

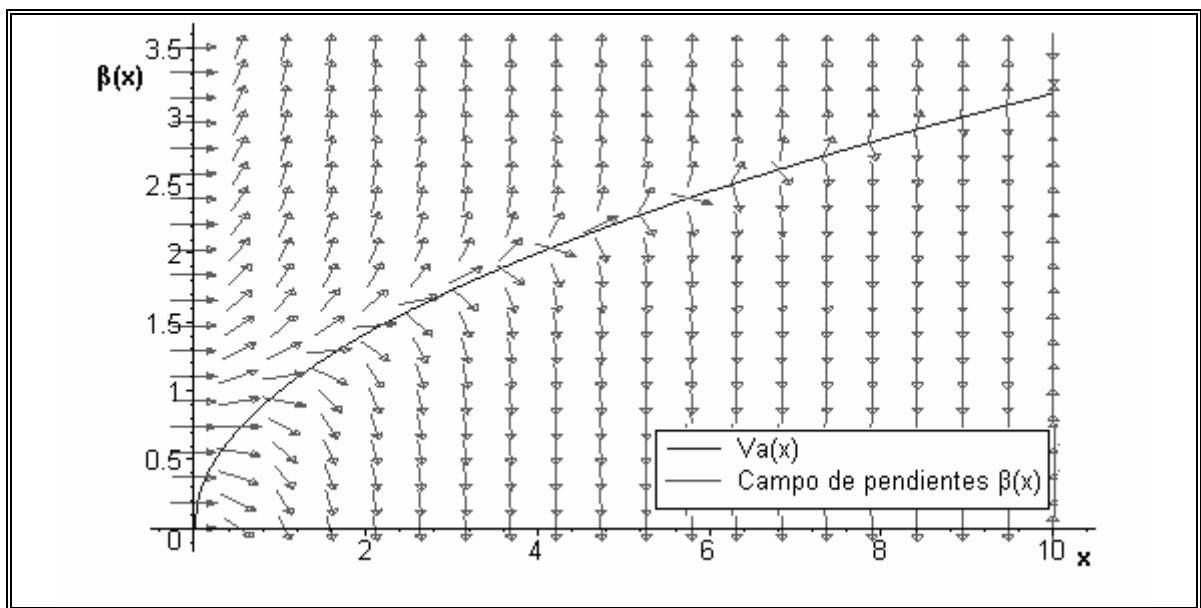


Figura C- 2: Experimento numérico N° 2

Ejemplo 3:

$$Va(x) = x$$

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_1(x) = \frac{x}{2}$$

$$[\alpha, \beta] = [0, 2]$$

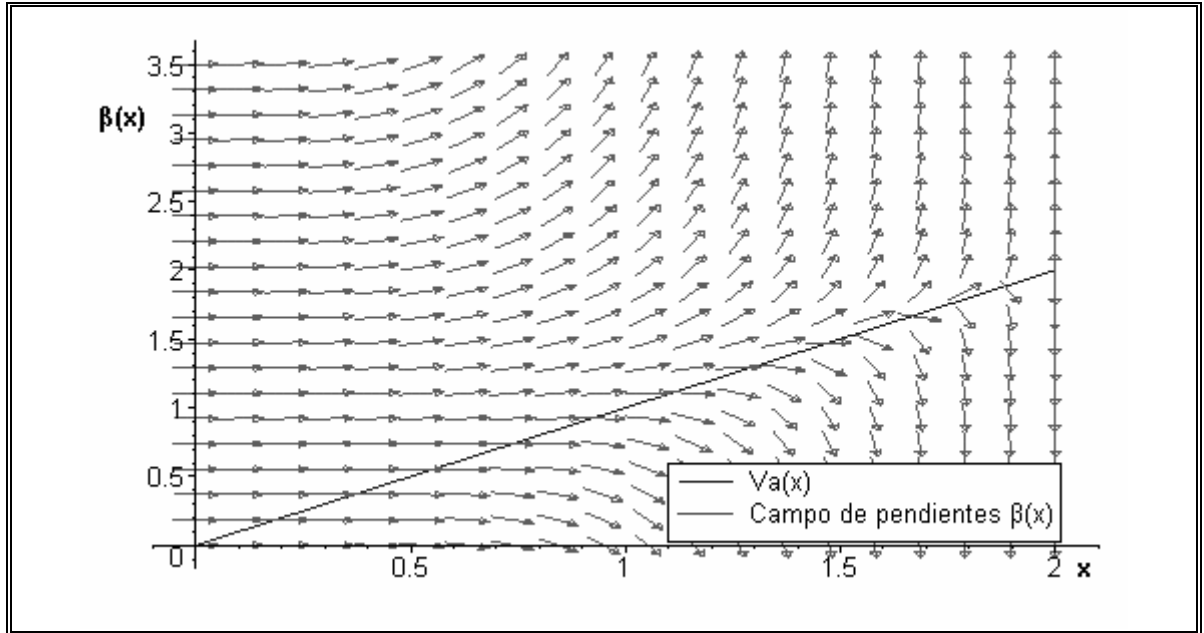


Figura C- 3: Experimento numérico N° 3

Ejemplo 4:

$$Va(x) = \sin^2(x)$$

$$f_1(x) = 3x^3$$

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{x}{10}}$$

$$[\alpha, \beta] = [0, 10]$$

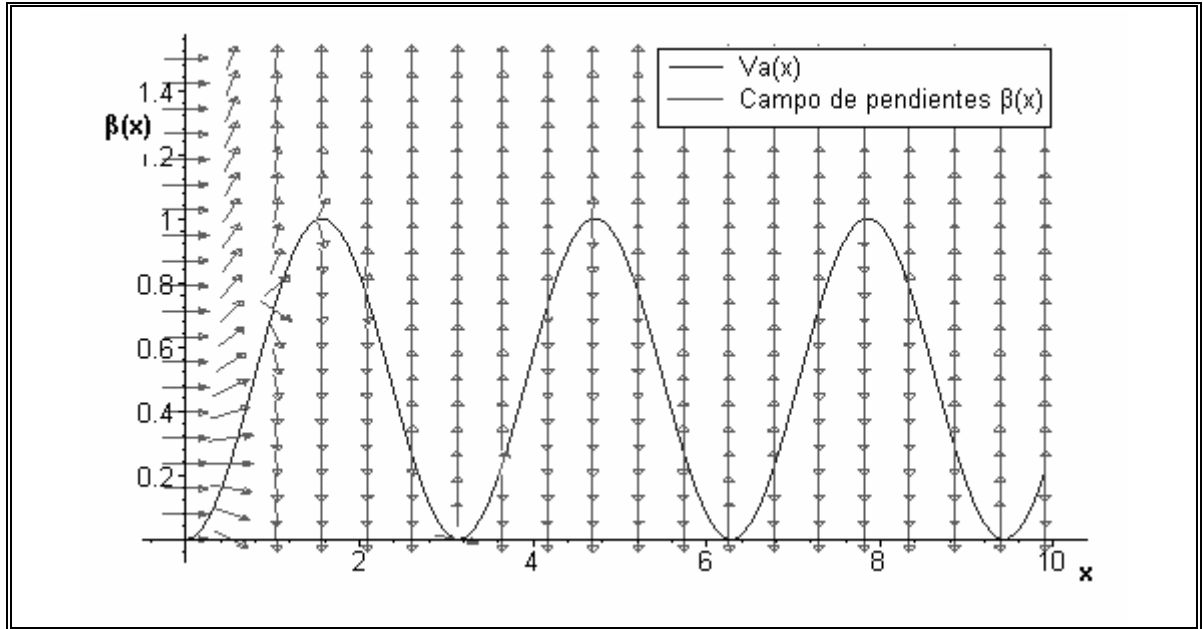


Figura C- 4: Experimento numérico N° 4

En conclusión, se puede aseverar que la convergencia del algoritmo numérico es bastante estable, por lo que no es necesario emplear un método numérico muy sofisticado para su resolución, el método numérico de Euler será suficiente.

En general, a lo largo de este trabajo no se presentaron problemas con la convergencia del método escogido, el cual fue implementado en Matlab6 ®.